Aufgabe 22: Vertauschende Observable, v. S. k. O. (schriftlich, 4 Punkte)

Ein physikalisches System mit einem dreidimensionalen Zustandsraum werde in einer aus den drei Kets $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$ und $|u_3\rangle$ gebildeten orthonormierten Basis beschrieben. Die beiden Operatoren $\hat{H}$ und $\hat{B}$ werden in dieser Basis (mit der angegebenen Reihenfolge) durch die Matrizen

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert; ω_0 und b sind reelle Konstanten.

a) [1 Punkt] Sind $\hat{H}$ und $\hat{B}$ hermitesch?

b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\hat{H}$ und $\hat{B}$ vertauschen. Geben Sie eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren von $\hat{H}$ und $\hat{B}$ an.

c) [1 Punkt] Welche Operatorenmenge $\{\hat{H}\}$, $\{\hat{B}\}$, $\{\hat{H}, \hat{B}\}$, $\{\hat{H}^2, \hat{B}\}$ bildet eine vollständigen Satz kommutierender Observabler (v. S. k. O.)?

Aufgabe 23: Zwei-Niveau-System (mündlich, 4 Punkte)

Der Hamilton-Operator eines Zwei-Niveau-Systems kann geschrieben werden als

$$\hat{H} = E_1 |\psi_1\rangle \langle\psi_1| + E_2|\psi_2\rangle \langle\psi_2| + V|\psi_1\rangle \langle\psi_2| + V'|\psi_2\rangle \langle\psi_1| ,$$

mit $\langle\psi_j|\psi_k\rangle = \delta_{jk}$, sowie $E_1, E_2 \in \mathbb{R}$ und $V, V' \in \mathbb{C}$.

a) [1 Punkt] Welche Beziehung muss zwischen V und V' bestehen, damit $\hat{H}$ hermitesch ist?

b) [1 Punkt] Untersuchen Sie die Wirkung von $\hat{H}$ auf $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$. Sind sie Eigenzustände zu $\hat{H}$?

c) [2 Punkte] Berechnen Sie für den Fall $V' = V^* =$ const. die Eigenwerte zu $\hat{H}$. Untersuchen Sie den Grenzfall $|V| \ll |E_1 - E_2|$.

Aufgabe 24: Harmonischer Oszillator (mündlich, 7 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in einem quadratischen Potenzial, $V(x) = \frac{k}{2}x^2$. Sie haben in der Vorlesung die entsprechende Quantenmechanik kennengelernt. Verwenden Sie die Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{k/m}$ und die charakteristische Länge $x_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$.

a) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass die Wellenfunktionen

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}x_0}}\, e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} \cdot H_0\left(\frac{x}{x_0}\right) \qquad \text{und} \qquad \psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}x_0}}\, e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} \cdot H_1\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

die stationäre Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_n(x) + V(x)\,\psi_n(x) = E_n\,\psi_n(x)$$

erfüllen.

b) [2 Punkte] Zeigen Sie ausgehend von der Definition des Operators $\hat{a} := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{x_0} + \frac{i}{\hbar}\, x_0\, \hat{p}\right)$, dass die folgenden Beziehungen gelten:

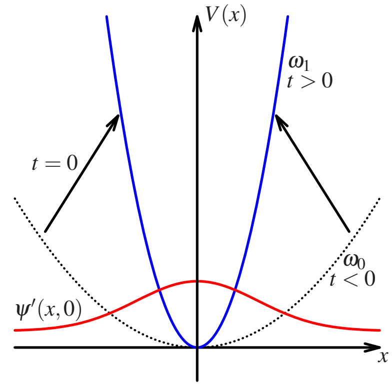
$$\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right) , \qquad \hat{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2} i x_0}\left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right) , \qquad \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = \hat{1} , \qquad \hat{H} = \hbar\,\omega\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right) .$$

c) [2 Punkte] Zeigen Sie explizit, d. h. mittels der Darstellung von $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ im reellen Raum, dass gilt:

$$\hat{a}\,|\psi_0\rangle \;=\; 0 , \qquad \hat{a}^\dagger|\psi_0\rangle \;=\; |\psi_1\rangle , \qquad \hat{a}\,|\psi_1\rangle \;=\; |\psi_0\rangle .$$

Aufgabe 25: Potentialänderung beim harmonischen Ozsillator (schriftlich, 7 Punkte)

Gegeben sei ein harmonischer Oszillator der Frequenz ω_0. Im Zeitraum $t < 0$ befinde sich der Oszillator im Grundzustand $\psi_0\,(x)$. Zur Zeit $t = 0$ wird durch einen äußeren Eingriff die Eigenfrequenz des Oszillators von ω_0 instantan auf ω_1 verändert. Dabei sei $\Delta\,\omega = \omega_1 - \omega_0 \ll \omega_1$. Der Zustand unmittelbar nach der Störung $\psi'\,(x,\, t = 0)$ ist nun kein Eigenzustand des Systems mehr.



a) [1 Punkt] Wie lauten die neuen Eigenfunktionen $\psi_0'\,(x)$, $\psi_1'\,(x)$ und $\psi_2'\,(x)$ zum HO mit ω_1 in Ortsdarstellung?

b) [2 Punkte] Entwickeln Sie $\psi'\,(x,\,0) = \psi_0\,(x)$ bis zur ersten Ordnung $\frac{\Delta\,\omega}{\omega_1}$. Dadurch kann $\psi'\,(x,\, t = 0)$ durch die neuen Eigenfunktionen ausgedrückt werden:

$$\psi'\,(x,\,0) \;=\; c_0\,\psi_0'\,(x) \,+\, c_2\,\psi_2'\,(x) .$$

Bestimmen Sie c_0 und c_2.

c) [2 Punkte] Wie lauten die Wellenfunktion $\psi'\,(x,\,t)$ und die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho\,(x,\,t) = |\psi'\,(x,\,t)|^2$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$? (Beschränken Sie sich wieder auf die erste Ornung.) Nach welcher Zeit $t = \tau$ wird die Anfangswahrscheinlichkeitsdichte $\rho\,(x,\,0)$ gerade wieder erreicht?

d) [2 Punkte] Berechnen Sie den Ortserwartungswert $\langle\hat{x}\rangle$ und die mittlere quadratische Unschärfe $(\Delta\,x)^2 = \langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2$ als Funktion der Zeit. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der quadratischen Unschärfe $(\Delta\,x)_0^2$ des Grundzustands $\psi_0'\,(x)$. Für die quadratische Unschärfe des Impulses ergibt sich

$$(\Delta\,p)^2 \;=\; \frac{\hbar\,m\,\omega_1}{2}\left[1 - \frac{\Delta\,\omega}{\omega_1}\cos\left(2\,\omega_1\,t\right)\right] .$$

Was ergibt sich für das Unschärfeprodukt $\Delta\,x \cdot \Delta\,p$?

Hinweis: Die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators der Frequenz ω lauten:

$$\psi_n\,(x) \;=\; A_n\,e^{-\frac{\alpha\,x^2}{2}}\,H_n\,(\sqrt{\alpha}\,x) \qquad \text{mit} \qquad A_n \;=\; \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{n!}} \qquad \text{und} \qquad \alpha \;=\; \frac{m\,\omega}{\hbar} ,$$

$$H_0\,(\zeta) \;=\; 1 , \qquad H_1\,(\zeta) \;=\; 2\,\zeta , \qquad H_2\,(\zeta) \;=\; 4\,\zeta^2 \,-\, 2 .$$