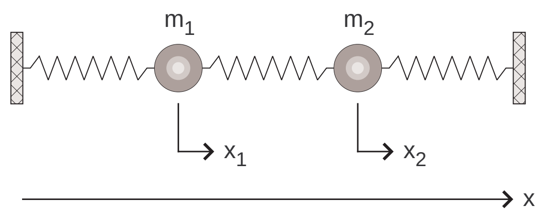
Aufgabe 1: Zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren (mündlich, 8 Bonuspunkte)

Zwei identische Massen $m_1 = m_2 = M$ sind zwischen zwei Wänden über drei Federn mit identischen Federkonstanten D eingespannt. Die Bewegung der Massen ist eingeschränkt auf die horizontale x-Achse, x_1 und x_2 seien die Auslenkungen aus der Ruhelage des Systems.



a) [2 Punkte] Geben Sie an, welche Kräfte auf m_1 bzw. m_2 wirken, wenn das System aus der Ruhelage (wie in der Abbildung skizziert) ausgelenkt wird, und welchen Bewegungsgleichungen die beiden Massen gehorchen.

b) [2 Punkte] Zur Lösung der Bewegungsgleichungen benutze man den Ansatz: $x_1 = B_1\, e^{i\,\omega\, t}$ und $x_2 = B_2\, e^{i\,\omega\, t}$, wobei B_1 und B_2 noch zu bestimmende Konstanten sind. Zeigen Sie, dass das Einsetzen des Ansatzes in die Bewegungsgleichungen auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2\,D - M\,\omega^2 & -D \\ -D & 2\,D - M\,\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (1.1)$$

führt, das nur lösbar ist, wenn die Determinante der Matrizen in (1.1) verschwindet. Berechnen Sie daraus die beiden charakteristischen Oszillatorfrequenzen ω_1 und ω_2 des Systems.

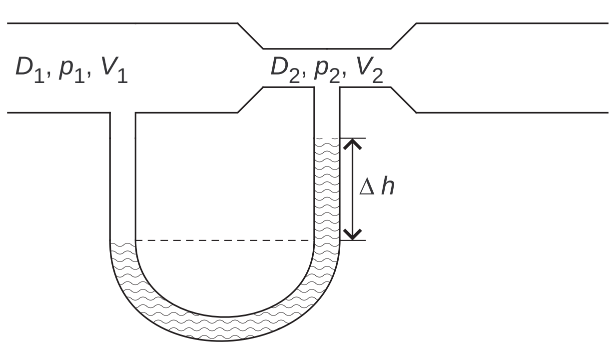
c) [1 Punkt] Wie lauten die zugehörigen speziellen Lösungen x_1 und x_2 in beiden Fällen und welche Zusammenhänge ergeben sich für B_1 und B_2?

d) [1 Punkt] Diskutieren Sie die Dynamik der beiden Lösungen, wenn die speziellen Anfangsbedingungen $x_1\,(0) = -x_2\,(0)$ oder $x_1\,(0) = x_2\,(0)$ gewählt werden.

e) [2 Punkte] Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung ist es nützlich, $y_1 = x_1 - x_2$ und $y_2 = x_1 + x_2$ zu betrachten. Schreiben Sie die unter a) erhaltenen Bewegungsgleichungen für x_1 und x_2 auf entkoppelte Bewegungsgleichungen für y_1 und y_2 um und geben Sie deren Lösungen an.

Aufgabe 2: Bernoulli-Gleichung (mündlich, 4 Bonuspunkte)

Ein Venturi-Rohr (siehe Skizze) hat den Durchmesser $D_1 = 10$ cm und $D_2 = 5$ cm. Ein Quecksilbermanometer zeigt einen Differenzdruck von $\Delta\, h$ mm Quecksilbersäule an ($\rho_{\mathrm{Hg}} = 13{,}5 \cdot 10^3$ kg/m^3). Wie groß ist der Durchsatz Q, wenn das Rohr von Wasser durchströmt wird und das Manometer $\Delta\, h = 50$ mm anzeigt?



Aufgabe 3: **Mathematische Hilfsmittel: Vorbereitendes zur Maxwell-Verteilung** **(mündlich, 8 Bonuspunkte)**

a) Bei der theoretischen Behandlung physikalischer Phänoneme treten häufig Integrale über Gauß-Funktionen in der Form $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n\, e^{-\alpha\, x^2}\, d\,x$ (mit $\alpha\, >\, 0$) auf.

i) [2 Punkte] Die Stammfunktion des Integranden im Gauß-Integral $I\, =\, \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, d\,x$ ist nicht durch elementare Funktionen darstellbar. Um den Wert des vorstehenden Integrals dennoch zu berechnen, benutzen wir einen Trick. Wir betrachten

$$I^2\, =\, \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, d\,x\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, d\,y\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, d\,x\; d\,y\ .$$

Benutzen Sie die Polarkoordinaten, um das Integral zu berechnen. Zeigen Sie auf diese Weise, dass

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, d\,x\, =\, \sqrt{\pi}\ .$$

ii) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2\,n\,+\,1}\, e^{-x^2}\, d\,x\, =\, 0\ ,$$

wo $n\, \in\, \mathbb{N}$.

iii) [2 Punkte] Betrachten Sie das Integral $I\,(\alpha)\, =\, \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, d\,x$ und benutzen Sie, dass

$$\frac{d}{d\,\alpha}\, I\,(\alpha)\, =\, \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial\,\alpha}\, e^{-\alpha\, x^2}\right) d\,x$$

um zu zeigen, dass

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2\,n}\, e^{-\alpha\, x^2}\, d\,x\, =\, \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\frac{(2\,n\,-\,1)!!}{(2\,\alpha)^n}\ ,$$

wobei $(2\,n\,-\,1)!!\, =\, 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\,n\,-\,1)$.

b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass für jede nicht-negative ganze Zahl n gilt:

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}\, x^n\, d\,x\, =\, n!\ .$$

Hinweis: vollständige Induktion.

c) [1 Punkt] Lösen Sie für $\lambda\, \in\, \mathbb{R}$ mit $\lambda\, \neq\, 0$ und $y_0\, \in\, \mathbb{R}$ das folgende Anfangswertproblem:

$$y'\,(x)\, =\, \lambda\, x\, y\,(x) \qquad (x\, \in\, R)\ , \qquad y\,(0)\, =\, y_0\ .$$

Hinweis: Trennung der Variablen.