Aufgabe 4: Druck in der Atmosphäre (schriftlich, 8 Punkte)

Einige Eigenschaften der Atmosphäre können gut in verschiedenen Näherungen beschrieben werden.

a) [2 Punkte] Benutzen Sie das hydrostatische Gleichgewicht

$$p(z) - p(z + dz) = \rho(z)\, g\, dz \ ,$$

um zu zeigen, dass unter der Annahme einer isotherme Atmosphäre (d. h. die Temperatur ist in der Atmosphäre konstant), der Druck folgende Abhängigkeit von der Höhe z hat:

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \qquad \text{(Barometrische Höhenformel)} \ .$$

Dabei ist H die „isothermische Skala“

$$H = \frac{R\,T}{M_a\, g} \ .$$

M_a ist die atomare Masse der Atmosphäre ($M_a = 29$ g/mol).

Stellen Sie dazu mit Hilfe der Beziehung für das hydrostatische Gleichgewicht eine Differentialgleichung auf. Benutzen Sie dabei das ideale Gasgesetz, um die Beziehung zwischen der Massendichte $\rho(z)$ und dem Druck $p(z)$ zu ermitteln.

Hinweis: $p(z + dz) = p(z) + \frac{dp}{dz}\, dz$.

b) [2 Punkte] Benutzen Sie die Ergebnisse aus Teil a) um zu zeigen, dass die Masse der Atmosphäre durch

$$M = \frac{4\pi R_E^2\, p_0}{g}\left[1 + 2\,\frac{H}{R_E} + 2\,\frac{H^2}{R_E^2}\right]$$

gegeben ist. Dabei ist R_E der Radius der Erde und p_0 der atmosphärische Druck am Boden. Wie groß ist die Masse der Atmosphäre ($T = 15$ °C und $R = 8{,}314$ J mol^{-1} K^{-1}) im Vergleich zur Masse der Erde ($M_E = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg)?

Hinweis: Verwenden Sie die barometrische Höhenformel aus a), um die Massendichte $\rho(z)$ zu bestimmen und integrieren Sie diese über den Bereich der Atmosphäre. Benutzen Sie dabei Kugelkoordinaten, deren Ursprung in der Mitte der Erde liegt.

c) [3 Punkte] Aus Erfahrung weiß man, dass die Temperatur in der Atmosphäre nicht konstant ist. Nun nehmen wir an, dass die nach oben steigende Luft (weil der Druck bei höheren Lagen kleiner ist) sich ausdehnt und adiabatisch (ohne Wärmeaustausch) gekühlt wird. Bei adiatischen Prozessen ist der Druck mit der Temperatur durch die Adiabatengleichung

$$p^{1-\kappa}\, T^{\kappa} = \text{konstant}$$

verknüpft, wobei $\kappa = \frac{C_p}{C_V}$ der Adiabatenkoeffizient ist. Differenzieren Sie die Adiabatengleichung nach z und zeigen Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus a), dass bei der adiabatischen Atmosphäre die Temperatur mit der Höhe z wie

$$T(z) = T_0\left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa}\,\frac{z}{H_0}\right)$$

fällt, wobei H_0 die isothermische Skala bei der Bodentemperatur T_0 ist. Zeigen Sie weiter, dass der Druck von der Höhe wie folgt

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{z}{H_0}\right)^{\kappa/(\kappa - 1)}$$

abhängt.

d) [1 Punkt] Überprüfen Sie, dass für $\kappa \approx 1$ die Temperatur konstant ist und der Druck durch

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{H_0}\right)$$

gegeben ist.

Aufgabe 5: Luftblase (mündlich, 6 Punkte)

Eine Luftblase mit einem Volumen von 20 cm^3 befindet sich einem See in 40 m Tiefe. Dort beträgt die Temperatur 4.0 °C. Die Blase steigt langsam zur Oberfläche, an der die Wassertemperatur 20 °C beträgt. Wie groß ist das Volumen der Luftblase an der Oberfläche? Nehmen Sie an, dass die Lufttemperatur in der Blase gleich der Wassertemperatur in der Umgebung der Blase ist.

Aufgabe 6: Druckausgleich (mündlich, 6 Punkte)

Der Behälter A enthält ein ideales Gas unter Druck p_1 bei einer Temperatur T_1. Der Behälter ist durch ein dünnes verschlossenes Rohr mit einem vierfach größeren Behälter B verbunden. Dort ist das gleiche Gas bei einem Druck p_2 und Temperatur T_2 eingeschlossen. Wenn wir das Verbindungsrohr öffnen, gleicht sich der Druck aus. Die Temperaturen der Gasanteile in beiden Behältern werden auf ihren ursprünglichen Werten T_1 und T_2 gehalten.

Wie groß ist der Druck nachher in beiden Behältern?