Aufgabe 16: Adiabatische Zustandsänderung des van der Waals-Gases (schriftlich, 8 Punkte)

a) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass bei einer adiabatischen Zustandsänderung allgemein der Zusammenhang

$$dT = -\frac{p + \frac{\partial U}{\partial V}\big|_T}{\frac{\partial U}{\partial T}\big|_V}\, dV$$

zwischen Temperaturänderung und Volumenänderung besteht.

b) [4 Punkte] Der Zustand eines van der Waals-Gases mit den Zustandsgleichungen

$$p = \frac{N\, k_B\, T}{V - n\, b} - \frac{n^2\, a}{V^2} \qquad \text{und} \qquad U = C_V\, T - \frac{a\, n^2}{V}$$

werde adiabatisch von T_1, V_1 nach T_2, V_2 verändert. Berechnen Sie T_2 in Abhängigkeit von T_1, V_1 und V_2.

Aufgabe 17: Temperaturschwankungen an der Erdoberfläche (schriftlich, 12 Punkte)

Zur Beschreibung der jährlichen Temperaturschwankungen unterhalb der Erdoberfläche gehen wir von folgendem Modell aus: Die Erdoberfläche wird als Oberfläche eines Halbraumes ($x \leq 0$) mit Temperaturleitzahl $a = 0{,}006\ \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ angesehen. Bei $x = 0$ wird als Randbedingung der Temperaturverlauf

$$T = T_0 - T_1 \cos(\omega_1\, t)$$

vorgegeben ($T_0 = 8$ °C, $T_1 = 10$ °C, $\omega_1 = \frac{2\,\pi}{1\ \text{Jahr}}$). Bei $x = -\infty$ ist die Temperatur gleich T_0.

a) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass die Temperatur als Funktion von Ort und Zeit die Form

$$T(x,\, t) = T_0 - T_1 \cos\left(\omega_1\, t + \sqrt{\frac{\omega_1}{2\, a}}\, x\right) e^{\sqrt{\frac{\omega_1}{2\,a}}\, x}$$

hat. Lösen Sie dazu die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T(x,\, t)}{\partial t} = a\, \frac{\partial^2 T(x,\, t)}{\partial x^2}$$

mit dem Ansatz $T(x,\, t) = e^{\gamma\, x}\, e^{i\, \omega\, t}$ und berücksichtigen Sie die obige Randbedingung.

Hinweis: Lösungen, die für $x \to -\infty$ divergieren, sind aus physikalischen Gründen auszuschließen.

b) [1 Punkt] In welcher Tiefe ist die Amplitude der Temperaturwelle auf den e-ten Teil des Maximalwertes abgesunken?

c) [1 Punkt] Wie groß ist die Geschwindigkeit der Temperaturwelle?

d) [1 Punkt] Skizzieren Sie den Temperaturverlauf $T(x)$ mit $0 \geq x \geq -20$ m für Januar ($t = 0$), April, Juli und Oktober.

e) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die tägliche Temperaturschwankung

$$T = T_0 + T_2 \cos\left(\omega_2 \left(t - t_2\right)\right) , \qquad \left(T_2 = 90 \text{ °C}, \omega_2 = \frac{2\pi}{24 \text{ h}}, t_2 = 14 \text{ h}\right) .$$

Bestimmen Sie $T(x, t)$. Wie tief dringt die Welle relativ zur jährlichen Temperaturschwankung in die Erde ein?

f) [1 Punkt] Bestimmen Sie $T(x, t)$ für eine Oberflächentemperatur von

$$T(0, t) = T_0 - T_1 \cos\left(\omega_1 t\right) + T_2 \cos\left(\omega_2 \left(t - t_2\right)\right) .$$

g) [2 Punkte] In welcher Tiefe muss man Wasserrohre verlegen, um vor Frost sicher zu sein? In welcher Tiefe sollte ein Weinkeller angelegt werden, damit die Temperaturschwankungen kleiner als 1 °C sind? In welcher Tiefe ist es im Januar am wärmsten?