Aufgabe 21: Elektrisches Feld einer geladenen Linie **(schriftlich, 7 Punkte)**

a) [1 Punkt] Gegeben sei eine homogen geladene Linie, die sich in x-Richtung von $-L$ bis L erstreckt und die Ladungsdichte

$$\rho\,(\vec{r}\,) \,=\, \rho\,(x,\,y,\,z) \,=\, \lambda\,\delta\,(y)\,\delta\,(z) \qquad \text{für} \qquad -L \,\leq\, x \,\leq\, L$$

besitzt. Bestimmen Sie die Konstante λ (Linienladungsdichte) derart, dass die gesamte Ladung der Linie den Wert Q hat.

b) [3 Punkte] Berechnen Sie das elektrische Feld

$$\vec{E}\,(\vec{r}\,) \,=\, \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \int \rho\,(\vec{r}\,')\, \frac{(\vec{r} \,-\, \vec{r}\,')}{|\vec{r} \,-\, \vec{r}\,'|^3}\, d^3\, r'$$

auf der Achse, die durch den Mittelpunkt der Linie geht (siehe Abbildung).

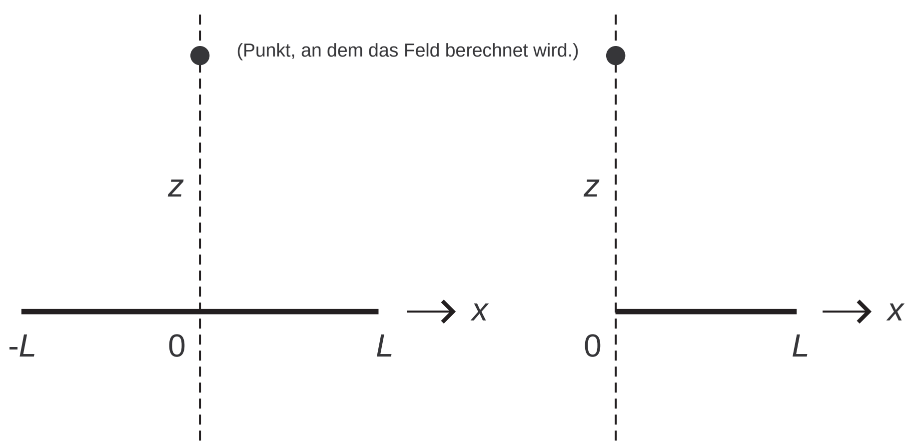
Zeigen Sie dazu zunächst, dass das Feld für die hier vorliegende Ladungsdichte die Form

$$\vec{E}\,(\vec{r}\,) \,=\, \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\lambda \int\limits_{-L}^{L} \frac{1}{\Big((x \,-\, x')^2 \,+\, y^2 \,+\, z^2\Big)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \,-\, x' \\ y \\ z \end{pmatrix} d\,x'$$

hat.

c) [3 Punkte] Betrachten Sie jetzt eine geladene Linie, die sich in x-Richtung von 0 bis L erstreckt und deren Gesamtladung ebenfalls Q beträgt. Wie groß ist in diesem Fall die Linienladungsdichte λ? Berechnen Sie das elektrische Feld auf der Achse, die durch den Endpunkt der Linie bei $x \,=\, 0$ geht. Bestimmen Sie das Feld im Grenzfall $z \,\gg\, L$.

Hinweis: Bei der Integration ist die Substitution $x \,=\, \sinh\,(t)$ nützlich.



Aufgabe 22: Linienladung **(mündlich, 7 Punkte)**

Gegeben sei ein in z-Richtung unendlich ausgedehnter und unendlich dünner Draht (Linie). In Zylinderkoordinaten (r, φ, z) beträgt die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = 2\kappa \frac{\delta(r)}{r} \delta(\varphi) .$$

a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die konstante Linienladungsdichte κ derart, dass die Ladung des Drahtes pro Länge L den Wert Q hat.

b) [5 Punkte] Berechnen Sie (unter Verwendung von Zylinderkoordinaten) das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ des Drahtes.

Aufgabe 23: Integralsatz von Gauß **(schriftlich, 6 Punkte)**

a) [4 Punkte] Ein Quader sei durch die Ungleichungen

$$0 \leq x \leq 2 , \qquad 0 \leq y \leq 3 \qquad \text{und} \qquad 0 \leq z \leq 1$$

definiert. Berechnen Sie explizit die linke und die rechte Seite des Integralsatzes

$$\oint\limits_{\text{OF von } V} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} = \int\limits_{V} \operatorname{div} \vec{a}(\vec{r})\, dV \qquad \text{für} \qquad \vec{a}(\vec{r}) = (x^2, -y - z, 0) ,$$

d. h. berechnen Sie einerseits den Fluss von $\vec{a}$ durch die Oberfläche des Quaders und bestimmen Sie andererseits das Volumenintegral der Divergenz von $\vec{a}$.

b) [2 Punkte] Gegeben sei ein Vektorfeld

$$\vec{a}(\vec{r}) = \left(x\,(z - \mathrm{e}^{x\,z}), -1 - y\,z, z\,\mathrm{e}^{x\,z} + z^3\right) .$$

Berechnen Sie den Fluss dieses Feldes durch die Oberfläche des unter a) gegebenen Quaders *unter Ausnutzung* des Integralsatzes.