Aufgabe TE1: Allgemeine Lösung des Fadenpendels (schriftlich, 12 Punkte)

Ausgehend von der Bewegungsgleichung für das ungedämpfte Pendel $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$ soll dessen allgemeine Lösung bestimmt werden.

a) [2 Punkte] Mit der Substitution $u = \dot{\varphi}$ zeige man zunächst, dass $\ddot{\varphi} = u \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,\varphi}$ gilt, und folgere daraus, dass

$$\frac{1}{2} u^2 = \frac{g}{l} \cos \varphi + c \qquad \text{(mit } c \text{ als Integrationskonstante)} .$$

b) [2 Punkte] Für die Anfangsbedingung $u = 0$ für $\varphi = \varphi_0$ (entspricht $\varphi(t = 0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$ für Anfangsauslenkung und Ausgangsgeschwindigkeit) bestimme man c.

c) [2 Punkte] Durch Separation der Variablen und Integration der Bewegung von $\varphi = 0$ bis φ_0 (entspricht einer Viertelperiode $T/4$ der Oszillation) zeige man

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int\limits_0^{\varphi_0} \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} . \qquad \text{(TE1)}$$

Tipp: $\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$.

d) [2 Punkte] Mit Hilfe von $k := \sin \frac{\varphi_0}{2}$ drücke man (TE1) durch ein vollständiges elliptisches Integral erster Art

$$K(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\,\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} , \qquad k^2 < 1$$

aus, wobei ϕ definiert ist über $\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \phi$. Für die Schwingungsdauer des Pendels sollte sich dann $T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\, K(k)$ ergeben.

e) [2 Punkte] Skizzieren Sie grob $K(k)$, indem Sie die Grenzfälle $|\varphi_0| \ll 1$ und $\varphi_0 \approx \pi$ sowie die Monotonieeigenschaft von $K(k)$ betrachten.

f) [2 Punkte] Mit Hilfe der binomischen Formel

$$(1 + x)^p = 1 + p\,x + \frac{p\,(p-1)}{2 \cdot 1} x^2 + \frac{p\,(p-1)\,(p-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} x^3 + \text{Terme höherer Ordnung}$$

kann für $|k| \ll 1$ die Schwingungsdauer gliedweise ausgerechnet werden. Zeigen Sie, dass

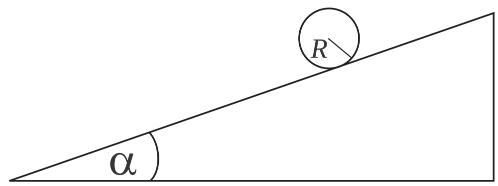
$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \text{Terme höherer Ordnung}\right] .$$

Hinweis: $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2\,n} \phi \,\mathrm{d}\,\phi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2\,n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2\,n} \frac{\pi}{2}.$

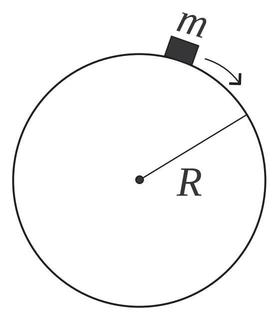
Aufgabe TE2: Klassifizierung mechanischer Systeme (mündlich, 8 Punkte)

Klassifizieren Sie die folgenden mechanischen Systeme danach, ob sie i) skleronom oder rheonom, ii) holonom oder nicht-holonom, iii) konservativ oder nicht-konservativ sind, und geben Sie die Zwangsbedingungen an. Alle Systeme befinden sich unter dem Einfluss der Schwerkraft. Wählen Sie für alle Systeme geeignete Koordinaten und verwenden Sie diese zur Formulierung der Zwangsbedingungen.

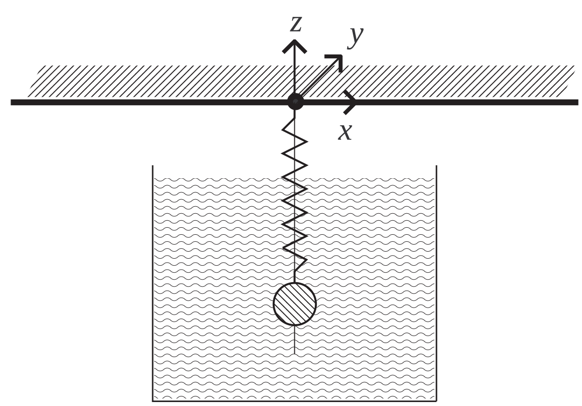
a) [2 Punkte] Ein Zylinder rollt reibungsfrei auf einer schiefen Ebene.



b) [2 Punkte] Eine Masse m gleitet reibungsfrei auf der Oberfläche einer großen Kugel.



c) [2 Punkte] Eine an einer Feder befestigte Perle bewege sich entlang einer Stange in einer viskosen Flüssigkeit.



d) [2 Punkte] Ein Pendel, dessen Aufhängepunkt durch einen Schrittmotor entlang der x-Achse mit $x_A = x_0 \cdot \cos(\omega t)$ bewegt wird, schwingt reibungsfrei in der x-y-Ebene.