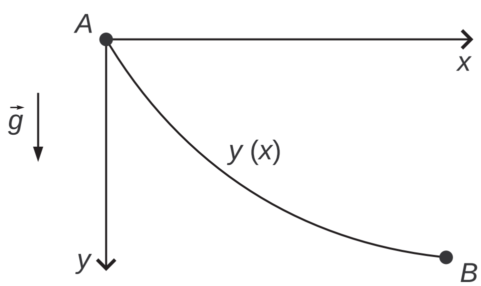
Aufgabe TE9: Variationsrechnung: Brachistochronenproblem (schriftlich, 7 Punkte)

Sie möchten gerne eine Achterbahn bauen, bei der in einem Segment der Wagen schnellstmöglich unter dem Einfluss des Schwerefeldes von Punkt A nach Punkt B kommt. Idealisiert betrachte man dazu einen Massenpunkt m, der sich reibungsfrei auf einer Rinne bewegt. Ziel ist dann die Bestimmung der Form der Rinne.



In der x-y-Ebene liegt A bei $(0,\,0)$ und B bei $(x_B,\,y_B)$. (Beachten Sie die Richtung der y-Achse.)

a) [2 Punkte] Die gesuchte Form $y\,(x)$ der Rinne folgt aus der Bedingung, dass die Laufzeit T von A nach B extremal wird. Zeigen Sie unter Verwendung des Energieerhaltungssatzes, dass T durch

$$T = \int_{t_A}^{t_B} d\,t = \int_A^B \frac{d\,s}{v} = \frac{1}{\sqrt{2\,g}} \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'\,(x)}}{\sqrt{y}}\,d\,x \quad \text{mit} \quad y'\,(x) = \frac{d\,y\,(x)}{d\,x}$$

gegeben ist.

b) [2 Punkte] Benutzen Sie das erste Integral der zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichung um zu zeigen, dass $y\,(x)\,(1 + y'\,(x)^2) = c$, wobei c eine Integrationskonstante ist.

c) [3 Punkte] Die Gleichung aus Teil b) ist eine Differentialgleichung für $y\,(x)$. Benutzen Sie die Transformation

$$y = c\,\sin^2\frac{\theta}{2}$$

um zu zeigen, dass die Form der Rinne durch

$$x = \frac{c}{2}\,(\theta - \sin\,\theta)\,, \qquad y = \frac{c}{2}\,(1 - \cos\,\theta)\,,$$

also durch eine Zykloide gegeben ist.

Aufgabe TE10: Lagrange-Gleichungen 1. Art: Massenpunkt auf rotierender Stange (schriftlich, 7 Punkte)

Eine bei $z = 0$ in der x-y-Ebene liegende Gerade rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um den Ursprung. Der momentane Winkel zur Horizontalen sei $\varphi\,(t)$ und der momentane Abstand eines auf der Geraden reibungsfrei bewegbaren Massenpunktes m bezogen auf den Ursprung sei $\rho\,(t)$. Es gibt keine eingeprägten Kräfte $\vec{F} = 0$. Im Folgenden ist es nützlich Zylinderkoordinaten zu verwenden.

a) [1 Punkt] Formulieren Sie die beiden Zwangsbedingungen f_1 und f_2, denen die Bewegung des Massenschwerpunktes unterliegt, in Zylinderkoordinaten.

b) [1 Punkt] Wie lauten die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes, wobei die wirkenden Zwangskräfte durch Kombination von Lagrange-Multiplikatoren und Ableitungen der Zwangsbedingungen ausgedrückt werden?

c) [1 Punkt] Differenzieren Sie die Zwangsbedingungen zweimal nach der Zeit, eliminieren Sie die entstehenden Beschleunigungen aus den Bewegungsgleichungen und bestimmen Sie die beiden Lagrange-Multiplikatoren.

d) [1 Punkt] Wie lauten die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes, wenn die Lagrange-Multiplikatoren eliminiert wurden?

e) [1 Punkt] Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $\rho(t)$, wobei Sie annehmen können, dass der Massenpunkt anfänglich, d. h. zur Zeit $t = 0$, im Punkt $\rho(0) = \rho_0$ ruht.

f) [1 Punkt] Bestimmen Sie die Bahnkurve $(\rho(t), \varphi(t), z(t))$ des Massenpunktes und interpretieren Sie die Bewegung physikalisch.

g) [1 Punkt] Nehmen Sie an, dass der Massenpunkt zur Zeit $t = 0$ nicht ruht, sondern mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\rho}(t = 0) \neq 0$ startet. Wie muss $\dot{\rho}(t = 0)$ aussehen, damit der Massenpunkt sich zum Zentrum hinbewegt und dort zur Ruhe kommt?

Aufgabe TE11: Bewegung im bistabilen Potential (mündlich, 6 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m, das sich nur in x-Richtung bewegen kann, sei zwischen zwei Federn mit Federkonstanten D und Längen l_0 im ungedehnten Zustand (Ruhelage) eingespannt. Dabei sei $l_0 > l$.

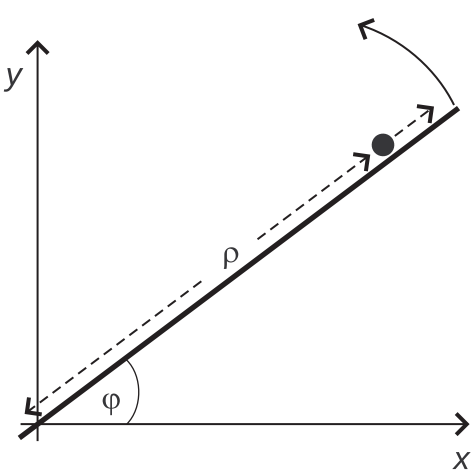
a) [1 Punkt] Geben Sie die in dem System wirkenden Kräfte an, stellen Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung auf und bestimmen Sie daraus das Potential $V(x)$.

b) [1 Punkt] Wie lauten die Lagrange-Funktion und die Hamilton-Funktion für das System?

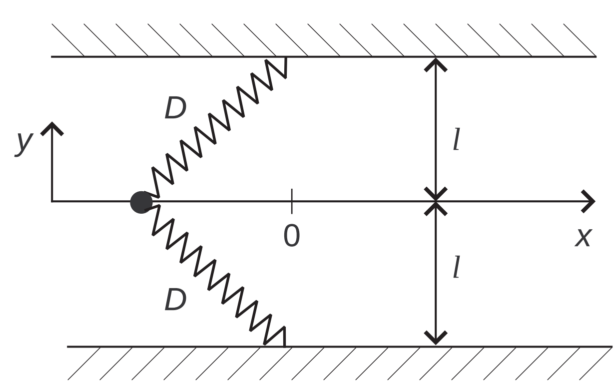
c) [2 Punkte] Berechnen Sie die möglichen Gleichgewichtslagen des Teilchens.

d) [1 Punkt] Das Potential lässt sich näherungsweise durch das bistabile Doppelmuldenpotential $V(x) = \frac{1}{4} b\, x^4 - \frac{1}{2} a\, x^2$ beschreiben, mit $a, b > 0$. Begründen Sie dies!

e) [1 Punkt] Skizzieren Sie das Potential aus Teil d) und diskutieren Sie qualitativ die möglichen Bahntypen. Geben Sie die genäherten Lagrange- und Hamilton-Funktionen an.



rotierende Stange



bistabiles Pendel