Aufgabe TE12: Teilchen im Zentralpotential (schriftlich, 10 Punkte)

Ein Teilchen mit der Masse m bewegt sich in einem Zentralkraftfeld mit dem Potential $V(r)$. Verwenden Sie aufgrund der Symmetrie des Potentials die Kugelkoordinaten r, ϑ, φ als generalisierte Koordinaten.

a) [1 Punkt] Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf.

Hinweis: Der Geschwindigkeitsvektor hat in Kugelkoordinaten die Form

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + r\,\dot{\varphi}\,\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi\ .$$

b) [2 Punkte] Berechnen Sie die generalisierten Impulse p_r, p_ϑ, p_φ und vergleichen Sie diese mit dem „mechanischen“ Impuls $\vec{p} = m\,\vec{v}$ in Kugelkoordinaten.

c) [4 Punkte] Stellen Sie die Hamilton-Funktion sowie die sechs Bewegungsgleichungen auf.

d) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\vartheta(t) = \pi/2$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen ist. Wie groß ist in diesem Fall $p_\vartheta(t)$? Berechnen Sie $p_\varphi(t)$.

e) [1 Punkt] Berechnen Sie den Drehimpuls $\vec{L} = m\,\vec{r}\times\vec{v}$ in Kugelkoordinaten. Diskutieren Sie für die Lösung aus d) den Zusammenhang zwischen der z-Komponente von $\vec{L}$ und dem generalisierten Impuls p_φ.

Hinweis: Für $\vartheta = \pi/2$ gilt $\vec{e}_\vartheta = -\vec{e}_z$.

Aufgabe TE13: Poisson-Klammern (mündlich, 10 Punkte)

Die physikalischen Größen $f = f(\vec{q}, \vec{p}, t)$, $g = g(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $h = h(\vec{q}, \vec{p}, t)$ mit $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ sowie $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, seien differenzierbare Funktionen (Observable). Für die zeitliche Entwicklung dieser Größen gilt (vgl. Vorlesung) z. B.:

$$\frac{d f}{d t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}\ ,$$

wobei $H = H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ die Hamilton-Funktion des betrachteten Systems ist und $\{\ldots, \ldots\}$ die Poisson-Klammer

$$\{f, g\} = \{f, g\}_{\vec{q},\vec{p}} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\ .$$

a) [4 Punkte] Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Poisson-Klammern:

Linearität:	$\{c_1 f + c_2 g, h\} = c_1\{f, h\} + c_2\{g, h\};\ c_i = \text{const.}$
Antisymmetrie:	$\{f, g\} = -\{g, f\}$
Nullelement:	$c = \text{const.} \Rightarrow \{c, f\} = 0$
Produktregel:	$\{f\,g, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}\,g$

b) [4 Punkte] Zeigen Sie für den Fall des harmonischen Oszillators mit

$$H = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{k}{2}\,x^2 \ ,$$

dass

$$\dot{x} = \{x,\, H\} = \frac{p}{m} \ , \qquad \dot{p} = \{p,\, H\} = -k\,x$$

gilt und bestimmen Sie daraus die Bewegungsgleichung für $\ddot{x}\,(t)$.

c) [2 Punkte] $f = f\,(\vec{q},\, \vec{p},\, t)$ und $g = (\vec{q},\, \vec{p},\, t)$ seien Erhaltungsgrößen, d. h.

$$\frac{d}{d\,t}\,f = 0 = \frac{d}{d\,t}\,g \ .$$

Zeigen Sie, dass auch für die von f und g gebildete Poisson-Klammer gilt:

$$\frac{d}{d\,t}\,\{f,\, g\} = 0 \ ,$$

d. h. die Poisson-Klammer ist eine Erhaltungsgröße. Diesen Zusammenhang bezeichnet man als Poisson'sches Theorem.