

**Aufgabe 29: Phasenübergang flüssig – gasförmig****(schriftlich, 14 Punkte)**

Betrachten Sie ein klassisches reales Gas aus  $N$  Teilchen im Volumen  $V$  bei der Temperatur  $T$ .

- a) [4P] Zwischen den Teilchen herrsche paarweise Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung; in grober Näherung möge sich diese Wechselwirkung durch ein Einzelteilchen-Potenzial der Form  $\phi(\vec{r}) = \infty$  (falls  $\vec{r}$  näher als  $r_0$  an einem der  $N$  Teilchen sein sollte),  $\phi(\vec{r}) = -\phi_0$  (überall sonst) ersetzen lassen ( $\leftrightarrow$  effektive Anziehung durch alle anderen Teilchen). Hierbei soll  $\phi_0$  proportional zur Teilchendichte sein:  $\phi_0 = a \cdot \frac{N}{V}$ .

Bestimmen Sie mit diesem Potenzial die kanonische Zustandssumme und die freie Energie  $F(T, V, N)$ . Zeigen Sie, dass sich daraus die Van-der-Waals-Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{aN^2}{V^2}\right)(V - Nb) = Nk_B T$$

ergibt. Wie hängt  $b$  mit  $r_0$  zusammen?

- b) [4P] Aus der Zustandsgleichung ergeben sich Isothermen im  $pV$ -Diagramm. Bei niedriger Temperatur (genauer: für  $T < T_C$ ) zeigen die Isothermen ein (unphysikalisches) „Durchschwingen“, bei hoher Temperatur (für  $T > T_C$ ) nicht.

Bestimmen Sie die kritische Temperatur  $T_C$ , den zugehörigen kritischen Druck  $p_C$  und das kritische Volumen  $V_C$ .

- c) [6P] Verwenden Sie die obigen Ergebnisse, um die Zustandsgleichung in die Form

$$\left(\tilde{p} + \frac{3}{v^2}\right)(3v - 1) = 8t$$

zu bringen (mit  $\tilde{p} = p/p_C$ ,  $v = V/V_C$  und  $t = T/T_C$ ).

Betrachten Sie nun kleine Abweichungen vom kritischen Punkt, d. h.  $\tilde{p} = 1 + d\tilde{p}$ ,  $v = 1 + dv$  und  $t = 1 + dt$ .

Zeigen Sie, dass bei *negativem*  $dt$  (d. h. bei geringer Temperaturabsenkung unter die kritische Temperatur) der Druck um  $d\tilde{p} = 4dt$  sinkt und das Volumen sich um  $dv = \pm 2\sqrt{-dt}$  ändert.

Zeigen Sie ferner, dass diese beiden Lösungen für  $dv$  mit unterschiedlicher Teilchendichte verbunden sind, die nunmehr als Ordnungsparameter zur Unterscheidung zweier Phasen (flüssig, gasförmig) dienen kann.

Zeigen Sie, dass für die Dichtedifferenz  $\rho_{\text{fl}} - \rho_{\text{gas}} \sim (T_C - T)^{1/2}$  gilt ( $\Rightarrow$  kritischer Exponent  $\frac{1}{2}$ ).

**Aufgabe 30: Phasenübergang zwischen zwei Kristallstrukturen (mündlich, 6 Punkte)**

Betrachten Sie ein Material, das (der Einfachheit halber bei  $T = 0$ ) in zwei verschiedenen Kristallstrukturen auftreten kann, deren jeweilige innere Energie  $u$  (pro Teilchen) vom Volumen  $v$  (pro Teilchen) abhängt (siehe Skizze).

Ohne äußeren Druck liegt das Material in Kristallstruktur  $A$  vor. Unter Druck wird das Material eine Phasenumwandlung  $A \rightarrow B$  zeigen, und zwar bei einem Druck, der durch die Steigung der eingezeichneten Tangente gegeben ist.

Begründen Sie diese „Hilfskonstruktion“, indem Sie die Gesamtenergie des Systems als gewichtete Summe der Energien der beiden Phasen ausdrücken und diese Summe minimieren (analog zur freien Energie beim Van-der-Waals-Gas).

Skizzieren Sie den Druck  $p$  und die Teilchenzahl  $N_A$  bzw.  $N_B$  in jeder Phase als Funktion des Volumens  $V$ .

