Statistische Physik (SS 2018) **Blatt 13** **Prof. Rohlfing**

Ausgabe: 10.07.2018, Abgabe: 17.07.2018, Besprechung: 19./20.07.2018

Aufgabe 32: Random Walk/Diffusion **(schriftlich 10, mündlich 5 Punkte)**

Ein reichlich angetrunkener Zeitgenosse versucht, von einer Gastwirtschaft, in der er gezecht hat, zu seiner Wohnung zu gelangen. Beide liegen an einer streng eindimensionalen Straße. Die Wahrscheinlichkeiten für einen Schritt (der Länge a) in die positive oder negative Richtung seien gleich, und sie hängen nicht von den vorherigen Schritten ab. Die Zeit für einen Schritt sei t_S.

a) [4P] Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er nach n Schritten (für n sehr groß) den Weg $N \cdot a$ in der gewünschten Richtung zurückgelegt hat.

b) [3P] Berechnen Sie daraus die Wahrscheinlichkeit $P(x, t)$ dafür, dass er sich zur Zeit t zwischen x und $x + dx$ befindet. Skizzieren Sie $P(x, t)$ für $t = 0$ und zu zwei späteren Zeiten. Bestimmen Sie $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$ als Funktion von t.

c) [3P] Definieren Sie eine zu $P(x, t)$ passende (Wahrscheinlichkeits-)Stromdichte (mit zugehöriger Kontinuitätsgleichung) und zeigen Sie, dass ihre Ergebnisse zu $P(x, t)$ als Lösung einer (eindimensionalen) Diffusionsgleichung dargestellt werden können, d. h.

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) - D \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) = 0 \, .$$

Bestimmen Sie die Diffusionskonstante D.

ab hier mündlich

d) [3P] Wie ändern sich die Ergebnisse in a) und b), wenn die Wahrscheinlichkeit für einen Schritt in positive Richung ein wenig größer als in negative Richtung ist (z. B. weil die Straße ein Gefälle in diese Richtung hat)?

e) [2P] Zeigen Sie, dass die Ergebnisse aus d) durch Überlagerung eines Diffusionsstroms und eines Driftstroms beschrieben werden können

$$\left(j(x, t) = -D \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) + \alpha P(x, t) \right) \, .$$

Erweitern Sie die Diffusionsgleichung um einen entsprechenden Term.

Hinweis: Für große Zahlen geht die Binomial-Verteilung in eine Normalverteilung über:

$$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2 \pi n p (1 - p)}} \exp\left(-\frac{(k - np)^2}{2 n p (1 - p)} \right) \, ,$$

solange nicht $p \approx 0$ oder $p \approx 1$.

Aufgabe 33: **Brown'sche Bewegung in der barometrischen Höhenformel** **(mündlich, 5 Punkte)**

Bekanntlich genügt die Luftdichte der barometrischen Höhenformel, die (vereinfachend für konstante Temperatur) durch

$$\rho\,(z) \,=\, \rho_0\,\exp\,(-m\,g\,z/k_B\,T)$$

gegeben ist.

Zeigen Sie, dass diese Dichteverteilung mit folgenden Annahmen konsistent ist:

- Aufgrund des Dichtegradienten gibt es einen (nach oben gerichteten) Diffusionsstrom, der durch eine Diffusionskonstante D kontrolliert wird.
- Aufgrund der Gravitation gibt es einen (nach unten gerichteten) Driftstrom, der dadurch entsteht, dass jedes Luftteilchen mit mittlerer Geschwindigkeit $\overline{v}$ nach unten sinken möchte (durch Reibung gebremst, mit Reibungskraft $|F_R| \,=\, \eta\,\cdot\,\overline{v}$).
- Im stationären Zustand addieren sich beide Ströme zu Null.

Bestimmen Sie aus diesen Annahmen den Zusammenhang zwischen D und η („Einstein-Beziehung“).