Statistische Physik (SS 2018) **Blatt 4** **Prof. Rohlfing**

Ausgabe: 30.04.2018, Abgabe: 08.05.2018, Besprechung: 11./17.05.2018

Aufgabe 10: Thermischer Kontakt/Energie-Fluktuationen **(schriftlich, 10 Punkte)**

In der Vorlesung wurde mit Hilfe des Maximalprinzips der Entropie (im mikrokanonischen Ensemble) das Problem zweier Teilsysteme (1 und 2) im thermischen Kontakt untersucht. Unter den Annahmen, dass jedes Teilsystem für sich im Gleichgewicht sei, und dass die Summe $E = E_1 + E_2$ der beiden Teilenergien konstant sei, ergibt sich die Entropie als

$$S = -k_B \int p(E_1) \ln(\epsilon \cdot p(E_1))\, dE_1 + \int dE_1\, p(E_1)\, [S_1(E_1) + S_2(E - E_1)] \ .$$

Hierbei sind S_j die (bereits maximalen) Entropien der beiden Teilsysteme, und $p(E_1)$ ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Energie des Teilsystems 1.

[Ob wie in der Vorlesung eine diskrete Verteilung ($\rightarrow$ Summation) betrachtet wird oder, wie hier, eine kontinuierlche Verteilungsfunktion ($\rightarrow$ Integration), ist letztlich ohne Belang. In der obigen Formel wurde eine kleine fiktive Energie-Einheit ϵ eingeführt, um einen konsistenten Zusammenhang zwischen Summe und Integral zu schaffen.]

In der Vorlesung war diskutiert worden, dass der zweite Beitragsterm zur Gesamtentropie maximal wird, wenn $p(E_1)$ durch einen Peak bei $\bar{E}_1$ gegeben ist, wobei $\bar{E}_1$ durch die Gleichheit der Temperatur in beiden Teilsystemen definiert ist.

Zusätzlich zur Vorlesung soll für $p(E_1)$ nunmehr ein verbreiterter Gauß-Peak um $\bar{E}_1$ herum angenommen werden, also:

$$p(E_1) = \alpha \exp\left(-\frac{(E_1 - \bar{E}_1)^2}{2\sigma^2}\right) \ .$$

a) [3P] Bestimmen Sie mit dieser Verteilung den ersten Beitragsterm zur oben angegeben Entropie-Funktion und zeigen Sie, dass er sich wie $\ln(\sigma)$ verhält.

b) [3P] Schätzen Sie den zweiten Beitragsterm ab, indem Sie die beiden Teil-Entropien S_1 und S_2 geeignet Taylor-entwickeln; zeigen Sie, dass dieser Beitragsterm mit

$$\frac{1}{2}\left(S_1''(\bar{E}_1) + S_2''(E - \bar{E}_1)\right) \cdot \sigma^2$$

abnimmt (vorausgesetzt, $S''(E) < 0$).

c) [2P] Maximieren Sie die Gesamtentropie bzgl. σ und bestimmen Sie die resultierende Energie-Unsicherheit („Energie-Fluktuation“) σ des ersten (und damit natürlich auch des zweiten) Teilsystems.

d) [2P] Spezifieren Sie Ihr Ergebnis für zwei ideale Gase (mit Teilchenzahlen N_1 und N_2). Zeigen Sie, dass die Energiefluktuation mit der Quadratwurzel der Teilchenzahl(en) bzw. mit der Quadratwurzel der Energie skaliert.

Aufgabe 11: Spin im kanonischen Ensemble/Paramagnetismus (mündlich, 8 Punkte)

Betrachten Sie die beiden Spinzustände eines Elektrons im Magnetfeld $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_z$ bei einer Temperatur T. Bestimmen Sie

i) [2P] die Magnetisierung M (d. h. den Erwartungswert von $\hat{S}_z$, multipliziert mit μ_B),

ii) [2P] den Erwartungswert der Energie,

iii) [2P] die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einem der beiden Spin-Zustände anzutreffen, und

iv) [2P] die Entropie des Systems. Benutzen Sie hierzu das quantenmechanische kanonische Ensemble.

Bestimmen Sie ferner die magnetische Suszeptibilität $\chi = \partial M/\partial B$. Diskutieren Sie das Verhalten der Magnetisierung und der Suszeptibilität bei sehr schwachem Magnetfeld und bei sehr starkem Magnetfeld.

Aufgabe 12: Energie-Fluktuation (mündlich, 2 Punkte)

Zeigen Sie im Rahmen des kanonischen Ensembles, dass für die Fluktuation der Energie der Zusammenhang

$$(\Delta E)^2 = -\frac{\partial}{\partial \beta}\langle E\rangle$$

gilt. Zeigen Sie ferner, dass sich unter der Voraussetzung $\langle E\rangle = C\,T$ (z. B. klassisches ideales Gas, klassische/r harmonische/r Oszillator(en) etc.) der Zusammenhang

$$(\Delta E)^2 = \langle E\rangle \cdot k_B\,T$$

ergibt.