WWU MÜNSTER

SoSe 2019

Übungen zu den Theoretischen Ergänzungen zur Physik II

Vorlesung: Prof.Dr. Tilmann Kuhn

Übungen: Dr. Karol Kovařík

Blatt 1

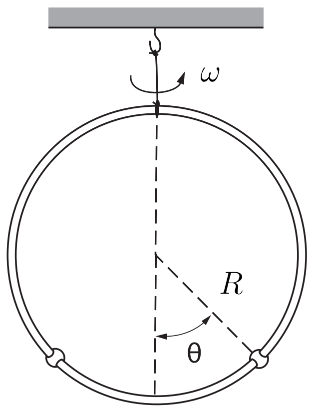
Abgabe: 08.05.19
Besprechung: 09. oder 10.05.19

Aufgabe 1: Masse auf Kreisring **(10 Punkte, mündlich)**

Ein Kreisring rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seinen vertikalen Durchmesser. Auf dem Kreisring kann sich ein Massenpunkt m reibungsfrei bewegen. Das Gravitationsfeld sei homogen.

(a) (3 Punkte) Stellen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung für den Massenpunkt m in demjenigen Koordinatensystem auf, in welchem der Kreisring ruht. Verwenden Sie dazu ebene Polarkoordinaten (r, ϑ) und drücken Sie die Gravitationskraft und die Scheinkräfte durch die Basisvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\vartheta$ aus.

Hinweis: Da sich der Massenpunkt nur auf dem Kreisring bewegen kann, muss nur die ϑ-Komponente der Bewegungsgleichung betrachtet werden.



(b) (3 Punkte) Leiten Sie die gefundene Differentialgleichung für $\vartheta(t)$ auch in einem Inertialsystem, in dem sich der Kreisring dreht, her. Verwenden Sie hierzu Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) und beachten Sie, dass wiederum nur die ϑ-Komponente betrachtet werden muss.

(c) (2 Punkte) Diskutieren Sie die möglichen Gleichgewichtslagen, d.h. Lösungen mit ϑ=const., des Massenpunktes in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit ω.

(d) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Energie in dem Koordinatensystem wo der Kreisring ruht

$$E = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\vartheta}^2 + V(\vartheta)$$

zeitlich konstant ist. Wie lautet $V(\vartheta)$? Skizzieren Sie $V(\vartheta)$ im Intervall $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ für die Fälle $\omega^2 = \frac{g}{2R}$ und $\omega^2 = \frac{2g}{R}$.

Hinweis: Überprüfen Sie, dass die Zentrifugalkraft für eine Drehung mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ konservativ ist und dass der zugehörige Potential lautet

$$V_\mathrm{Z} = -\frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta \,.$$

Aufgabe 2: Teilchen auf Kegelmantel **(10 Punkte, schriftlich)**

Ein Massenpunkt der Masse m gleite reibungsfrei an der Innenseite eines auf der Spitze stehenden Kreiskegels mit Öffnugswinkel 2α (siehe Skizze). Nach unten wirke die Schwerkraft $\vec{F}_g = -mg\,\vec{e}_z$.

(a) (1 Punkt) Welchen Zwangsbedingungen ist der Massenpunkt unterworfen? Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

(b) (3 Punkte) Geben Sie die kinetische Energie T, die potenzielle Energie V und die Lagrange-Funktion L in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) an. Eliminieren Sie die Koordinate ρ mit Hilfe der Zwangsbedingung.

(c) (3 Punkte) Wie lauten die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für φ und z? Berechnen Sie den zu φ gehörenden generalisierten Impuls p_φ. Zeigen Sie, dass dieser mit der z-Komponente des Drehimpulses übereinstimmt und dass es sich dabei um eine Erhaltungsgröße handelt. Eliminieren Sie φ aus den Bewegungsgleichungen unter Verwendung der Erhaltung von p_φ.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen auch Kreisbahnen mit konstanter Höhe $z = z_0$ als Lösung haben. Wie müssen die Anfangsbedingungen lauten um solche Kreisbahnen zu realisieren?

(e) (2 Punkte) Die Bewegungsgleichung für z können Sie für kleine Höhenschwankungen $z(t) = z_0 + \xi(t)$ mit $\xi(t) \ll z_0$ näherungsweise lösen, indem Sie z^{-3} um z_0 entwickeln und nach dem Linearglied abbrechen. Wie lautet diese Lösung?