Übungen zu den Theoretischen Ergänzungen zur Physik II

Vorlesung: Prof.Dr. Tilmann Kuhn
Übungen: Dr. Karol Kovařík

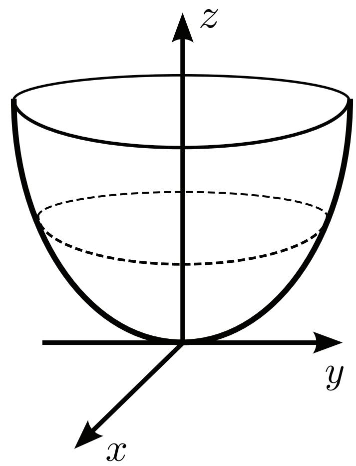
Blatt 2

Abgabe: 15.05.19
Besprechung: 16. oder 17.05.19

Aufgabe 3: Lagrange-Gleichungen erster Art **(10 Punkte, mündlich)**

Ein Massenpunkt bewegt sich reibungsfrei unter dem Einfluss der Gravitationskraft auf der Innenfläche des Rotationsparaboloids gegeben durch

$$x^2 + y^2 = az\,.$$



(a) (1 Punkt) Schreiben Sie die Zwangsbedingung für diese Bewegung in kartesischen bzw. in Zylinderkoordinaten in der Form

$$g_1(x, y, z) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad g_1(r, \varphi, z) = 0\,,$$

und geben Sie jeweils auch die differentielle Form an.

(b) (4 Punkte) Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen erster Art

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \lambda \frac{\partial g_1}{\partial q_i}\,,$$

einmal in kartesischen Koordinaten und dann in Zylinderkoordinaten auf. λ ist dabei ein Lagrange-Multiplikator.

(c) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten entkoppeln und die Bewegungsgleichungen auf die Differentialgleichung

$$\ddot{r} + \frac{4}{a^2}\left(r\dot{r}^2 + r^2\ddot{r}\right) - \frac{L_z^2}{m^2 r^3} + \frac{2\,rg}{a} = 0$$

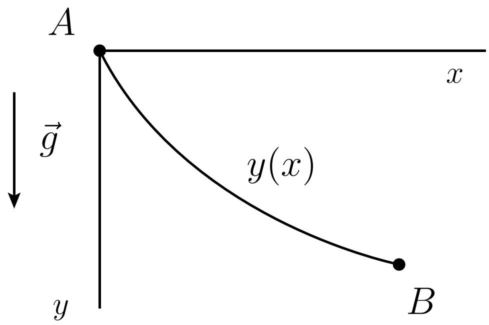
führen, wobei $L_z = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.}$

(d) (2 Punkte) Überprüfen Sie, dass die Bewegungsgleichungen eine Bewegung in einer konstanten Höhe $z(t) = z_0 = \text{const.}$ erlauben. Bei welcher Geschwindigkeit ist diese Bewegung möglich? Geben Sie zusätzlich die Zwangskraft an, die das Rotationsparabolid auf die Masse m ausübt.

Aufgabe 4: Brachistochronenproblem **(10 Punkte, schriftlich)**

Sie möchten gerne eine Achterbahn bauen, bei der in einem Segment der Wagen schnellstmöglich unter den Einfluss des Schwerefeldes von Punkt A nach Punkt B kommt. Idealisiert betrachte man dazu einen Massenpunkt m, der sich reibungsfrei auf einer Rinne bewegt. Ziel ist dann die Bestimmung der Form der Rinne.

In der x, y Ebene liegt A bei $(0, 0)$ und B bei (x_B, y_B).



(a) (4 Punkte) Um die gesuchte Form der Rinne $y(x)$ aus der Extremalisierungsbedingung

$$T(A \to B) = \int_A^B dt = \text{min.}$$

zu bestimmen, muss das Funktional $T(A \to B)$ zunächst auf die Form

$$T(A \to B) = \int_{x_A}^{x_B} f(y(x), y'(x))\, dx$$

gebracht werden. Benutzen Sie den Energieerhaltungssatz und $ds = v(x, y)\, dt$ um $f(y(x), y'(x))$ und damit $T(A \to B)$ zu bestimmen.

(b) (2 Punkte) Benutzen Sie die Tatsache, dass das erste Integral der zugehörigen Euler-Lagrange Gleichung

$$y'(x)\frac{\partial f}{\partial y'} - f\,,$$

konstant ist um zu zeigen, dass

$$y(x)(1 + y'(x)^2) = c\,,$$

wobei c eine Integrationskonstante ist.

(c) (4 Punkte) Die Gleichung aus Teil (b) ist eine Differentialgleichung für $y(x)$. Benutzen Sie zuerst die Separation der Variablen und danach die Substitution

$$y = c\sin^2\frac{\theta}{2}$$

um zu zeigen, dass die Form der Rinne durch

$$\begin{aligned} x &= \frac{c}{2}\big(\theta - \sin\theta\big) \\ y &= \frac{c}{2}\big(1 - \cos\theta\big) \end{aligned}$$

also durch eine Zykloide gegeben ist.