WWU MÜNSTER

SoSe 2019

Übungen zu den Theoretischen Ergänzungen zur Physik II

Vorlesung: Prof.Dr. Tilmann Kuhn
Übungen: Dr. Karol Kovařík

Blatt 4

Abgabe: 26.06.19
Besprechung: 27. oder 28.06.19

Aufgabe 8: Possionklammer-Formalismus **(10 Punkte, schriftlich)**

Die physikalischen Größen $f = f(\vec{q}, \vec{p}, t)$, $g = g(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $h = h(\vec{q}, \vec{p}, t)$ mit $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ sowie $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, seien differenzierbare Funktionen (Observable). Für die zeitliche Entwicklung dieser Größen gilt (vgl. Vorlesung):

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{f, H\} + \partial_t f \ ,$$

wobei $H = H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ die Hamilton-Funktion des betrachteten Systems ist und $\{\ldots, \ldots\}$ die Poissonklammer

$$\{f, g\} = \{f, g\}_{\vec{q},\vec{p}} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$$

(a) (4 Punkte) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Poissonklammern:

Linearität: $\{c_1 f + c_2 g, h\} = c_1 \{f, h\} + c_2 \{g, h\}$; $c_i = \text{const.}$

Antisymmetrie: $\{f, g\} = -\{g, f\}$

Nullelement: $c = \text{const} \Longrightarrow \{c, f\} = 0$

Produktregel: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\} g$

(b) (4 Punkte) Zeigen Sie für den Fall des harmonischen Oszillators mit

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2$$

dass

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{x, H\} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= \{p, H\} = -kx \end{aligned}$$

gilt und bestimmen Sie daraus die Bewegungsgleichung für $x(t)$.

(c) (2 Punkte) Weisen Sie das Poissonsche Theorem nach:

$f = f(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $g = g(\vec{q}, \vec{p}, t)$ seien Erhaltungsgrößen, d.h.

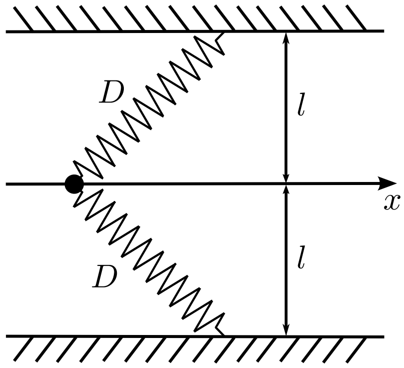
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f = 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g.$$

Dann ist auch die mit f und g gebildete Poissonklammer $\{f, g\}$ eine Erhaltungsgröße.

Aufgabe 9: Bewegung im bistabilen Potential **(10 Punkte, mündlich)**

Ein Teilchen der Masse m, das sich nur in x-Richtung bewegen kann, sei gemäß der Abbildung zwischen zwei Federn mit Federkonstanten D und Längen $l_0 > l$ im ungedehnten Zustand (Ruhelage) eingespannt (siehe Abbildung).

(a) (3 Punkte) Geben Sie die in dem System wirkenden Kräfte an, stellen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung auf, und bestimmen Sie daraus das Potential $U(x)$.



(b) (1 Punkt) Wie lauten die Lagrange-Funktion und die Hamilton-Funktion für das System?

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie die möglichen Gleichgewichtslagen des Teilchens.

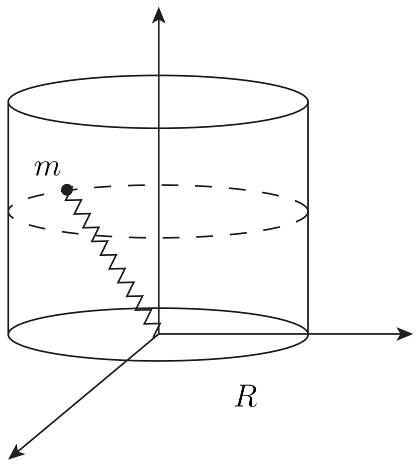
(d) (2 Punkte) Das Potential lässt sich näherungsweise durch das bistabile Doppelmuldenpotential $V(x) = \frac{1}{4}bx^4 - \frac{1}{2}ax^2$ beschreiben, mit $a, b > 0$. Begründen Sie dies!

(e) (2 Punkte) Skizzieren Sie das Potential aus Teil (d) und diskutieren Sie qualitativ die möglichen Bahntypen. Geben Sie die genäherten Lagrange- und Hamilton-Funktionen an. Skizzieren Sie die Bahnen zu verschiedenen Energien im Phasenraum (x-p-Raum).

Aufgabe 10: Ein Teilchen bewegt sich auf einem Zylindermantel **(13 Punkte, schriftlich)**

Ein Teilchen mit der Masse m bewegt sich reibungsfrei auf dem Mantel eines Zylinders mit einem Radius R. Zusätzlich wirkt auf das Teilchen eine zum Ursprung gerichtete Kraft $\vec{F} = -k\vec{r}$.

(a) (2 Punkte) Benutzen Sie Zylinderkoordinaten und schreiben Sie die Geschwindigkeit des Teilchens als Funktion von R, $\dot{z}$ und $\dot{\phi}$.



(b) (4 Punkte) Geben Sie die Lagrange-Funktion des Teilchens an.

(c) (3 Punkte) Leiten Sie mittels der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichungen des Teilchens her.

(d) (4 Punkte) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen und beschreiben Sie die Bewegung.

Hinweis: Zyliderkoordinaten sind

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi\,, \\ y &= r\sin\phi\,, \\ z &= z\,. \end{aligned}$$