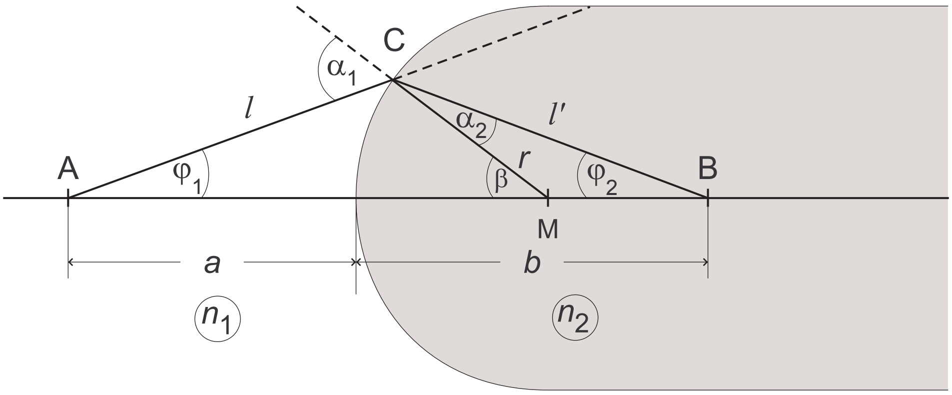
Aufgabe 44: Brechung durch Kugelfläche (mündlich, 11 Punkte)

Ermitteln Sie die Linsengleichung für die Abbildung durch eine sphärische Fläche für achsennahe Strahlen, d. h. kleine Winkel φ_1, φ_2, β, α_1, α_2.



Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

a) Zeigen Sie zunächst auf *zwei verschiedene* Arten, dass folgende Gleichung gilt:

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r} \ .$$

i) Leiten Sie mit Hilfe geometrischer Überlegungen im Dreieck AMC bzw. BMC, dem Brechungsgesetz und zum Schluss der Näherung $l \approx a$ und $l' \approx b$ obige Relation ab.

ii) Berechnen Sie mit Hilfe des Kosinussatzes im Dreieck AMC bzw. BMC die Längen l bzw. l' als Funktion des Winkels β. Minimalisieren Sie dann die optische Weglänge $n_1\,l + n_2\,l'$ (Fermat'sches Prinzip) bezüglich β. Was ergibt sich für l und l' für kleine β? Setzen Sie diese Resultate ein, um obige Relation zu erhalten.

b) Berechnen Sie dann die Brennweiten f_1 und f_2, indem Sie parallel einfallendes Licht, d. h. $b \to \infty$ bzw. $a \to \infty$, betrachten. Zeigen Sie, dass gilt:

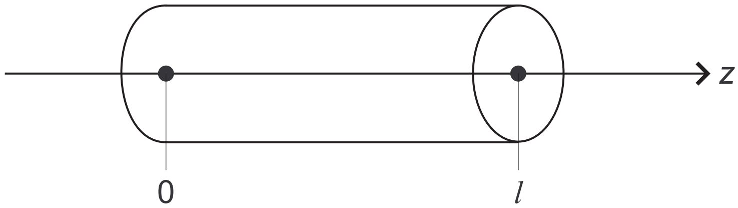
$$\frac{f_1}{a} + \frac{f_2}{b} = 1 \ .$$

Aufgabe 45: Gradienten-Optik (schriftlich, 13 Punkte)

Ein achsenparalleler Lichtstrahl fällt von Luft ($n = 1$) aus am Punkt (x_0, 0, 0) auf einen Glaszylinder der Länge l, dessen Brechzahl $n\,(\rho)$ quadratisch vom Achsenabstand gemäß

$$n\,(\rho) = n_0 \left(1 - \frac{k^2}{2}\,\rho^2\right)$$

abhängt.



a) Welche Stetigkeitsbedingung ergibt sich aus der Bahngleichung im Rahmen der Gauß'schen Dioptrik (paraxiale Näherung)

$$\frac{d}{d\,z}\left(n^{(0)}(z)\,x'(z)\right) = 2\,n^{(2)}(z)\,x(z)$$

für die Eintrittsfläche ($z = 0$) und die Austrittsfläche ($z = l$)? Dabei ist

$$n^{(0)}(z) = n(z,\,\rho = 0) \qquad \text{und} \qquad n^{(2)}(z) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial\,\rho^2}\,n(z,\,\rho)\Big|_{\rho=0}\,.$$

b) Berechnen Sie für diese Anordnung die Lage des Brennpunktes F, die Brennweite und die Lage der Hauptebene H als Funktion des Parameters $k\,l$.

c) Skizzieren Sie die Strahlverläufe (Bahnen) für $k\,l \approx 1$, $k\,l \approx \pi$ und $k\,l \approx 5$ und $n_0 = 1,5$.

Aufgabe 46: Variationsrechnung (mündlich, 4 Punkte)

Berechnen Sie die Funktion $y(x)$, die das Integral

$$I = \int_0^2 \frac{y'^2}{x^3}\,d\,x$$

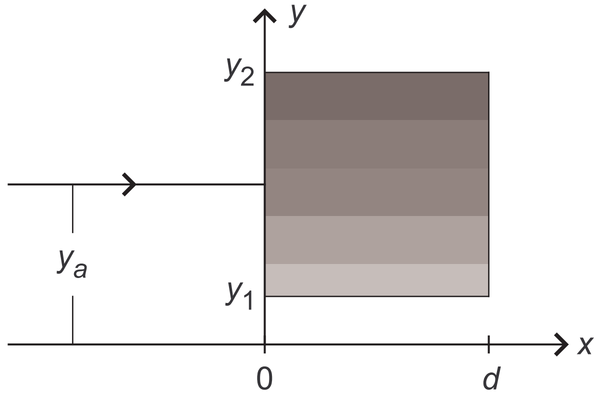
mit $y(0) = -1$ und $y(2) = 15$ extremal macht.

Aufgabe 47: Fermat'sches Prinzip (schriftlich, 7 Punkte)

Ein Lichtstrahl breite sich in der y-x-Ebene aus. Im Bereich $0 \leq x \leq d$ und $y_1 \leq y \leq y_2$ mit $y_1 > 0$ befinde sich ein Medium mit dem Brechungsindex $n(y) = n_0\,y$.

a) Berechnen Sie ausgehend vom Fermat'schen Prinzip die allgemeine Form des Lichtwegs $y(x)$. Nutzen Sie dabei aus, dass bei einem Variationsproblem $\int f(y,\,y',\,x)\,d\,x = \text{extremal}$, bei dem f nicht explizit von x abhängt, die Relation $y'\,\frac{\partial f}{\partial y'} - f = h = \text{konstant}$ gilt.

b) Ein Lichtstrahl falle aus $-x$-Richtung senkrecht bei $\vec{r}_1 = (0,\,y_a)$ auf das Medium. An welcher Stelle y_b tritt der Lichtstrahl bei $x = d$ wieder aus? Skizzieren Sie den Lichtweg im Medium.



Aufgabe 48: Lagrange-Funktion für Teilchen im elektromagnetischen Feld **(mündlich, 5 Punkte)**

Ein Teilchen mit der Masse m und der Ladung Q bewegt sich in einem elektromagnetischen Feld. Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion mit dem skalaren Potential $\varphi(\vec{r}, t)$ und dem Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m v^2 - Q \left(\varphi(\vec{r}, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)\right) \\ &= \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i^2 - Q \left(\varphi(\vec{r}, t) - \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i A_i(\vec{r}, t)\right) \end{aligned}$$

auf die Bewegungsgleichungen mit der Lorentzkraft

$$m \ddot{\vec{r}} = Q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

führt.

Hinweis: Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für die drei Komponenten $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ auf und nutzen Sie aus, dass für zwei Vektorfelder $\vec{a}(\vec{r})$ und $\vec{b}(\vec{r})$ folgende Relation gilt:

$$\left(\vec{a} \times \operatorname{rot} \vec{b}\right)_j = \sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_j} - \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\right) .$$