Aufgabe 59: Zeitdilatation (schriftlich, 10 Punkte)

Ein Astronaut startet bei $t = 0$ von der Erde zum 4 Lichtjahre entfernten Stern α-Centauri. Er fliegt mit der Geschwindigkeit $v = 0,8\,c$. Als er den Stern erreicht, kehrt er sofort um und fliegt mit der gleichen Geschwindigkeit zur Erde zurück. Während der Reise senden er und sein auf der Erde zurückgebliebener Bruder sich im Abstand eines halben Jahres (im jeweiligen Ruhesystem gemessen) Funksignale zu.

a) Wieviel Zeit vergeht auf der Erde, bis der Astronaut zurückkommt? Welche Reisedauer misst dieser selbst?

b) Wie viele Funksignale empfängt der auf der Erde zurückgebliebene Bruder während des Hinfluges und während des Rückfluges? Wann erreichen ihn die Signale? Welcher Frequenz entspricht das? Wie viele Signale sendet er selbst während der Dauer des Fluges?

Aufgabe 60: Nützliche Relation bei Geschwindigkeitsaddition (schriftlich, 4 Punkte)

In einem System S bewegt sich ein Teilchen mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_x,\, v_y,\, v_z)$. Ein Beobachter in einem System S', das sich relativ zu S mit $\vec{v}_{\text{rel}} = (v_{\text{rel}},\, 0,\, 0)$ bewegt, misst für die Teilchenbewegung eine Geschwindigkeit $\vec{v}\,'$.

Stellen Sie mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Additionstheoreme $v'^2 = |\vec{v}\,'|^2$ durch v, v_x und v_{rel} dar und zeigen Sie, dass folgende Relation gilt:

$$\gamma\,(v') = \gamma\,(v)\,\gamma\,(v_{\text{rel}})\,\left(1 - \frac{v_x\,v_{\text{rel}}}{c^2}\right) \ .$$

Dabei ist die Funktion $\gamma\,(u)$ durch

$$\gamma\,(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

gegeben.

Aufgabe 61: Invarianz der Wellengleichung (mündlich, 8 Punkte)

Ein System S' bewegt sich relativ zu einem System S mit der konstanten Geschwindigkeit v in x-Richtung. Im System S lautet die Wellengleichung für das skalare Potential

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\, x^2} + \frac{\partial^2}{\partial\, y^2} + \frac{\partial^2}{\partial\, z^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\, t^2}\right)\,\varphi\,(\vec{r},\, t) = 0 \ .$$

Zeigen Sie unter Verwendung der Lorentz-Transformation, dass im System S' die Wellengleichung die Form

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\, x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial\, y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial\, z'^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\, t'^2}\right)\,\varphi'\,(\vec{r}\,',\, t') = 0$$

hat.

Hinweis: Stellen Sie dazu

$$\frac{\partial\,\varphi}{\partial\, x'}\,, \qquad \frac{\partial^2\,\varphi}{\partial\, x'^2}\,, \qquad \frac{\partial\,\varphi}{\partial\, t'} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2\,\varphi}{\partial\, t'^2}$$

durch Ableitungen nach x und t dar.

Aufgabe 62: **Verkopplung von zwei Relativbewegungen** **(mündlich, 12 Punkte)**

Ein System S' bewege sich relativ zu einem System S mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1 = (0,\, v_1,\, 0)$ in y-Richtung. Ein System S'' bewege sich relativ zu S' mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_2\,' = (v_2',\, 0,\, 0)$ (gemessen in S') in x'-Richtung. Zur Zeit $t = 0$ fallen die Ursprünge der drei Koordinatensysteme zusammen.

a) Berechnen Sie die Koordinaten x'', y'', z'' und t'' in S'' in Abhängigkeit von x, y, z und t. Verwenden Sie dabei Vierervektoren und stellen Sie die Lorentz-Transformation mit Hilfe von Matrizen dar.

Schreiben Sie dazu die aus der Vorlesung bekannten Additionstheoreme auf eine Relativbewegung in y-Richtung um.

Verwenden Sie die Abkürzungen

$$\gamma_1 := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \qquad \text{und} \qquad \gamma_2 := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2'^2}{c^2}}}\ .$$

b) Überprüfen Sie, ob Ihr Resultat aus a) für die Spezialfälle $v_1 = 0$ oder $v_2' = 0$ das erwartete Ergebnis liefert.

c) Welche Geschwindigkeit $\vec{v}_2$ misst ein Beobachter im System S für die Bewegung des Ursprungs des Koordinatensystems S'' in Abhängigkeit von v_1 und v_2'?

Aufgabe 63: **Drehung der Polarisationsrichtung** **(schriftlich, 6 Punkte)**

a) Die Transmission einer Polarisationsfolie betrage in Durchlassrichtung 90 %, senkrecht dazu polarisiertes Licht werde völlig absorbiert. Zehn dieser Folien werden so übereinander gelegt, dass ihre Durchlassrichtung jeweils $10°$ gegeneinander verdreht sind, d. h. die Polarisationsrichtungen der ersten und der letzten Folie stehen dann senkrecht aufeinander.

Wie groß ist die durchgelassene Lichtintensität bei unpolarisiert einfallendem Licht?

b) Betrachten Sie nun eine entsprechende Anordnung aus N Folien, die jeweils um $\dfrac{90°}{N-1}$ gegeneinander verdreht sind.

Bei welcher Anzahl von Folien ist die durchgelassene Lichtintensität am größten?