Aufgabe 64: Area sinus hyperbolicus (mündlich, 10 Punkte)

Bei einigen Rechnungen in der relativistischen Mechanik tritt die Funktion $y = \operatorname{arsinh}(x)$ auf. Sie ist die Umkehrfunktion von $f(x) = \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Diese Aufgabe soll Sie an die wesentlichen Eigenschaften von $\operatorname{arsinh}(x)$ erinnern.

a) Skizzieren Sie $y = \sinh(x)$ und $y = \operatorname{arsinh}(x)$.

b) Zeigen Sie, dass $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \operatorname{arsinh}(x)$ gilt. Nutzen Sie dabei die Eigenschaften von $x = \sinh(y)$ aus.

c) Berechnen Sie die Ableitung $\dfrac{d}{d\,x}\operatorname{arsinh}(x)$ unter Verwendung der Rechenregel für Umkehrfunktionen.

d) Zeigen Sie, dass folgende Beziehung gilt:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,d\,x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) \ .$$

Aufgabe 65: Relativistische Bewegung bei konstanter Kraft (schriftlich, 7 Punkte)

Ein Teilchen bewege sich in einem konstanten Feld $\vec{F} = (F,\,0,\,0)$. Berechnen Sie für die Anfangsbedingungen $\vec{p}(0) = (0,\,0,\,p_0)$ und $\vec{r}(0) = (x_0,\,0,\,0)$ die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und die Bahnkurve $\vec{r}(t)$.

Skizzieren Sie Ihr Resultat für $\vec{r}(t)$.

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass sich $\vec{v}$ mit Hilfe der relativistischen kinetischen Energie T_{rel} in der Form

$$\vec{v}(t) = \vec{p}(t)\,\frac{c^2}{T_{\text{rel}}}$$

schreiben lässt.

Aufgabe 66: Relativistisches Elektron im Magnetfeld (mündlich, 10 Punkte)

Ein Teilchen mit der Ladung q bewege sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = (0,\,0,\,B)$ unter dem Einfluss der Lorentz-Kraft $\vec{F} = q\,(\vec{v}\times\vec{B})$.

a) Zeigen Sie, dass sich die relativistische Bewegungsgleichung

$$\frac{d\,\vec{p}}{d\,t} = \vec{F}$$

wegen der speziellen Form der Kraft bei dieser Bewegung als

$$m\,\gamma\,\frac{d\,\vec{v}}{d\,t} = q\,(\vec{v}_\perp \times \vec{B})$$

schreiben lässt. Dabei ist $\vec{v}_\perp$ die zu $\vec{B}$ senkrechte Komponente der Geschwindigkeit ($\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$). Nutzen Sie dabei aus, dass

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\vec{F}}{m\,\gamma} - \frac{\vec{v}\,(\vec{F}\cdot\vec{v})}{m\,\gamma\,c^2}$$

gilt.

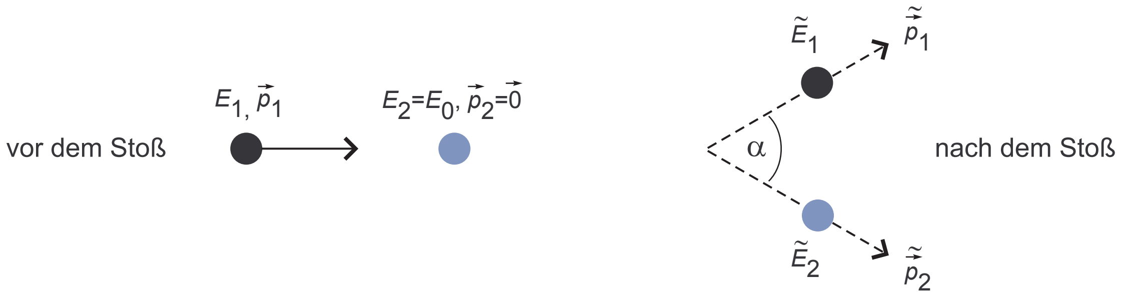
b) Erläutern Sie, warum sich bei einer Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$, die senkrecht zu $\vec{B}$ ist, ein Kreis als Bahnkurve ergibt. Berechnen Sie den Radius R des Kreises in Abhängigkeit von v. Bestimmen Sie R für ein Elektron mit $E_{\text{kin}}^{\text{rel}} = 10$ MeV in einem Magnetfeld von $2\,T$. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem Resultat einer klassischen Rechnung.

Aufgabe 67: Relativistischer Stoß (schriftlich, 7 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m stoße elastisch mit einem ruhenden Teilchen der gleichen Masse zusammen. Zeigen Sie unter Verwendung des Energiesatzes, des Impulssatzes und der Energie-Impuls-Beziehung, dass der Winkel α zwischen den Impulsen der beiden Teilchen nach dem Stoß durch

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{2\,E_0}{\tilde{E}_1 - E_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{2\,E_0}{E_1 - \tilde{E}_1}\right)}}$$

gegeben ist. E_1 ist die Energie des Teilchens 1 vor dem Stoß, $\tilde{E}_1$ die Energie nach dem Stoß und $E_0 = m\,c^2$. Was bedeutet dieses Resultat für $v \ll c$ und für $v \approx c$?



Aufgabe 68: Faraday-Effekt (schriftlich, 6 Punkte)

Zur Deutung des Faraday-Effekts denkt man sich die einfallende, in x-Richtung linear polarisierte ebene Welle der Frequenz ω in eine Summe aus einer rechts- und einer linkszirkular polarisierten Welle zerlegt, für die jeweils die Brechzahlen $n_+ = n\,(\omega + \omega_L)$ und $n_- = n\,(\omega - \omega_L)$ gelten. Dabei ist $n\,(\omega)$ der frequenzabhängige Brechungsindex ohne Magnetfeld.

Zeigen Sie zunächst, dass sich der Realteil der Welle nach Durchlaufen der Probe der Dicke d und bei angelegtem Magnetfeld schreiben lässt als

$$\mathrm{Re}\,\vec{E} = E_0\,\cos\left(\frac{k\,d}{2}\,(n_+ + n_-) - \omega\,t\right) \cdot \{\vec{e}_x\,\cos\,\alpha - \vec{e}_y\,\sin\,\alpha\} \qquad \text{mit} \qquad \omega = c\,k\;.$$

Dabei ist α die Winkeldrehung der Polarisationsebene.

Da die Larmor-Frequenz $\omega_L = e\,B/2\,m$ sehr klein ist, kann der in α vorkommende Brechzahlunterschied $n_+ - n_-$ nach ω_L entwickelt werden. Was ergibt sich daraus für die Winkeldrehung $\alpha = V\,B\,d$? (B und d sind das Magnetfeld und die Dicke der Probe.) Wie hängt die Verdet'sche Konstante V von der Dispersion $\frac{d\,n}{d\,\omega}$ ab? Stellen Sie diesen Zusammenhang auch in der konventionellen Form mit $\frac{d\,n}{d\,\lambda}$ dar (Kettenregel).