Aufgabe 11: Schwingungen der eingespannten Saite (schriftlich, 13 Punkte)

Eine ideale Saite sei bei $x = 0$ und $x = l$ fest eingespannt.

a) Berechnen Sie die Auslenkung $u(x,\, t)$ der Saite, wenn sie zur Zeit $t = 0$ gemäß

$$u(x,\, 0) = u_0 \sin\left(\frac{2\pi}{l}\, x\right) , \qquad \dot{u}(x,\, 0) = 0$$

ausgelenkt wird.

b) Berechnen Sie die Auslenkung $u(x,\, t)$ der Saite, die sich nach „Anschlagen“ der Saite bei $t = 0$ gemäß

$$u(x,\, 0) = 0 \;, \qquad \dot{u}(x,\, 0) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le x \le \frac{l-a}{2} \\ v_0 & \text{für} \quad \frac{l-a}{2} \le x \le \frac{l+a}{2} \\ 0 & \text{für} \quad \frac{l+a}{2} \le x \le l \end{cases}$$

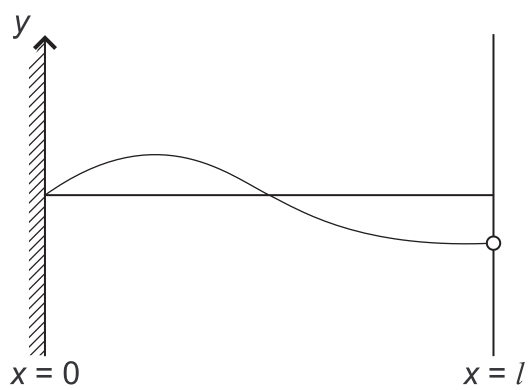
ergibt (Klavierhammer). Mit welcher Amplitude tragen die Eigenschwingungen der Saite zur Schwingung bei?

Aufgabe 12: Einseitig eingespannte Saite (schriftlich, 7 Punkte)

Eine ideale Saite sei bei $x = 0$ fest eingespannt.

Das andere Ende der Saite sei an einem Ring befestigt, der sich reibungsfrei an einem in y-Richtung liegenden Stab bewegen kann. Dadurch verlaufe die Saite bei $x = l$ stets horizontal.

- Berechnen Sie die Eigenfrequenzen dieser Saite.
- Skizzieren Sie die Eigenschwingungen mit den vier niedrigsten Frequenzen.



Aufgabe 13: Violinsaite (mündlich, 2 Punkte)

Eine Violinsaite aus Stahl habe die Länge $l = 0{,}33$ m, den Radius $r = 0{,}12$ mm und die Massendichte $\rho = 7{,}8$ g/cm^3.

Mit welcher Spannung τ muss die Saite gespannt werden, um in der Grundschwingung einen Ton mit 660 Hz zu erzeugen?

Aufgabe 14: Lösung der eindimensionalen Wellengleichung (mündlich, 8 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass

$$u\,(x,\,t) = F\,(x + c\,t) - F\,(-x + c\,t)$$

die eindimensionale Wellengleichung löst und die Randbedingungen $u\,(0,\,t) = u\,(l,\,t) = 0$ erfüllt. Dabei ist $F\,(\tau)$ mindestens zweimal stetig differenzierbar und es gilt:

$$F\,(\tau + 2\,l) = F\,(\tau)\ .$$

b) Entwickeln Sie $F\,(\tau)$ in eine Fourierreihe und zeigen Sie so, dass obige Form der Lösung $u\,(x,\,t)$ der aus der Vorlesung bekannten Form der Lösung der Wellengleichung entspricht.

Aufgabe 15: Eigenschaften der Fouriertransformation (mündlich, 10 Punkte)

a) Zeigen Sie durch einfaches Hinschreiben, dass folgende Aussagen für die Fouriertransformierte

$$\tilde{f}\,(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\,(t)\,\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t}\,d\,t$$

der Funktion $f\,(t)$ gelten:

1. $f\,(t)$ gerade $\rightarrow$ $\tilde{f}\,(\omega)$ gerade
2. $f\,(t)$ gerade, reell $\rightarrow$ $\tilde{f}\,(\omega)$ gerade, reell
3. $f\,(t)$ ungerade $\rightarrow$ $\tilde{f}\,(\omega)$ ungerade
4. $f\,(t)$ ungerade, reell $\rightarrow$ $\tilde{f}\,(\omega)$ ungerade, imaginär
5. $f\,(t)$ allgemein, reell $\rightarrow$ $\tilde{f}\,(\omega) = \tilde{f}_1\,(\omega) - i\,\tilde{f}_2\,(\omega)$ mit $\tilde{f}_1\,(\omega)$ gerade, reell, $\tilde{f}_2\,(\omega)$ ungerade, reell und $\tilde{f}\,(-\omega) = \tilde{f}\,(\omega^*)$.

b) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierten $\tilde{f}\,(\omega)$ für gerade bzw. ungerade Funktionen $f\,(t)$ als Integrale über das halbe Intervall mit nur cos- bzw. sin-Funktionen als Integralkern geschrieben werden können.

c) Berechnen Sie die Fouriertransformierte eines endlichen Wellenzuges der Form

$$f\,(t) = \begin{cases} \sin\,(\omega_0\,t) & \text{für} \quad |t| < \dfrac{N\,\pi}{\omega_0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \ .$$

Skizzieren Sie Ihr Resultat für $\tilde{f}\,(\omega)$.

z. B. $N = 2$