Aufgabe 16: Energiedichte (mündlich, 12 Punkte)

Die Energiedichte ε (Energie pro Länge) einer idealen Saite mit der Massendichte μ (Masse pro Länge) beträgt

$$\varepsilon(x,\,t) = \varepsilon_{\text{kin}}(x,\,t) + \varepsilon_{\text{pot}}(x,\,t) = \frac{1}{2}\,\mu\left\{\left(\frac{\partial\,u(x,\,t)}{\partial\,t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial\,u(x,\,t)}{\partial\,x}\right)^2\right\}\,,$$

wobei $u(x,\,t)$ die Auslenkung der Saite ist.

a) Zeigen Sie unter Verwendung der Wellengleichung, dass für die Energie

$$E(t) = \int_a^b \varepsilon(x,\,t)\,d\,x$$

der Saite zwischen den Punkten a und b Folgendes gilt:

$$\frac{\partial\,E(t)}{\partial\,t} = S(b,\,t) - S(a,\,t) \qquad \text{mit} \qquad S(x,\,t) = \mu\,c^2\,\frac{\partial\,u(x,\,t)}{\partial\,t}\,\frac{\partial\,u(x,\,t)}{\partial\,x}\,.$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\frac{\partial}{\partial\,x}\left(\frac{\partial\,u}{\partial\,x}\,\frac{\partial\,u}{\partial\,t}\right)$. Diesen Ausdruck können Sie beim Beweis gewinnbringend ausnutzen.

b) Ist die Energie für eine beidseitig eingespannte Saite eine Erhaltungsgröße?

c) Ein 2 m langer und 0,1 kg schwerer Draht schwinge mit seiner niedrigsten Eigenfrequenz. Die Zugkraft im Draht betrage 40 N und die Amplitude in der Mitte sei 2 cm. Zur Zeit $t = 0$ sei $\dot{u}(x,\,0) = 0$.

i) Geben Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit für Wellen auf dem Draht an. Wie groß ist ω?

ii) An welchen Stellen x besitzen ε_{kin} und ε_{pot} ihre maximalen Werte?

iii) Wie groß ist die Schwingungsenergie des Drahtes?

Aufgabe 17: Gedämpfte Saite (schriftlich, 9 Punkte)

Die Auslenkungen einer Saite werden durch Energieabgabe an das umgebende Medium und durch dissipative Prozesse beim Biegen der Saite gedämpft. In einfachster Näherung kann man diese Dämpfung durch eine geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft beschreiben. Dies führt auf eine Wellengleichung der Form

$$\frac{\partial^2\,u(x,\,t)}{\partial\,x^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\,u(x,\,t)}{\partial\,t^2} - \frac{\gamma}{c^2}\,\frac{\partial\,u(x,\,t)}{\partial\,t} = 0\,.$$

Dabei ist γ eine Konstante.

a) Lösen Sie diese Wellengleichung unter Verwendung eines Separationsansatzes der Form $u(x,\,t) = f(x)\cdot g(t)$ für eine Saite, die bei $x = 0$ und $x = l$ fest eingespannt ist. Zeigen Sie, dass die gedämpften Eigenschwingungen die Form

$$u_n(x,\,t) = \sin(k_n\,x)\,\left(a_n\,\sin(\omega_n\,t) + b_n\,\cos(\omega_n\,t)\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}\,t}$$

haben. Wie hängt dabei ω_n von n und γ ab?

Hinweis: Wählen Sie die bei der Separation auftretende Konstante zu $\lambda = -k^2$ mit k reell.

b) Bestimmen Sie $u\,(x,\,t)$ für eine Anfangsauslenkung der Saite $u\,(x,\,0) = \sin\left(\frac{4\,\pi}{l}\,x\right)$ und eine Anfangsgeschwindigkeit $\dot{u}\,(x,\,0) = 0$.

Aufgabe 18: Schallgeschwindigkeit (mündlich, 2 Punkte)

Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit in Wasser! (Kompressionsmodul $\kappa = 2 \cdot 10^9$ N/m^2.)

Aufgabe 19: Überlagerung von ebenen Wellen (schriftlich, 4 Punkte)

Eine ebene Welle wird an einer ideal spiegelnden Oberfläche in der x-y-Ebene (also $z = 0$) reflektiert. Die einfallende Welle wird beschrieben durch

$$u_{\text{ein}}\,(\vec{r},\,t) = A\,\sin\,(\vec{k}_{\text{ein}} \cdot \vec{r} - \omega\,t) \qquad \text{mit} \qquad \vec{k}_{\text{ein}} = k_x\,\vec{e}_x + k_z\,\vec{e}_z\ .$$

Der Einfallswinkel α_1 ist also gegeben durch $\tan\,\alpha_1 = k_x/k_z$. Bei der Reflektion bleiben die Amplitude A und die Kreisfrequenz $\omega = c\,k$ unverändert.

a) Überlegen Sie sich, wie der $\vec{k}$-Vektor $\vec{k}_{\text{aus}}$ der auslaufenden Welle auf Grund des Reflektionsgesetzes aussehen muss.

b) Geben Sie $u_{\text{aus}}\,(\vec{r},\,t)$ an. Dabei ist zu beachten, dass $u\,(\vec{r},\,t) = u_{\text{ein}}\,(\vec{r},\,t) + u_{\text{aus}}\,(\vec{r},\,t)$ an der spiegelnden Oberfläche für alle Zeiten t verschwinden muss.

c) Zeigen Sie, dass sich $u\,(\vec{r},\,t)$ als Produkt einer stehenden Welle in z-Richtung und einer laufenden Welle in x-Richtung schreiben lässt.

d) Gibt es außer $z = 0$ noch andere Ebenen, auf denen $u\,(\vec{r},\,t)$ stets Null ist? Falls ja, wo liegen sie?

Aufgabe 20: Fouriertransformierte einer Gaußfunktion (mündlich, 6 Punkte)

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\tilde{f}\,(\omega)$ einer Gaußfunktion

$$f\,(t) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\,\sigma}}\ .$$

Aufgabe 21: Lösung einer Differentialgleichung durch Potenzreihenansatz (schriftlich, 7 Punkte)

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,f\,(x) + l^2\,f\,(x) = 0$$

mit dem Potenzreihenansatz

$$f\,(x) = \sum_{n\,=\,0}^{\infty} a_n\,x^n\ .$$

Geben Sie $f\,(x)$ in geschlossener Form an.