Aufgabe 22: Quadratische Membran (schriftlich, 7 Punkte)

Die Eigenschwingungen einer quadratischen Membran, die am Rand fest eingespannt ist, sind entartet, d. h. $\omega_{n_x,\,n_y} = \omega_{n_y,\,n_x}$.

a) Geben Sie die Eigenschwingungen $u_{n_x,\,n_y}(x,\,y,\,t)$ an. Wählen Sie die dabei auftretenden Konstanten so, dass $\dot{u}_{n_x,\,n_y}(x,\,y,\,0) = 0$ ist und der Maximalwert der Auslenkungen U_M beträgt. An welchen Stellen treten die maximalen Auslenkungen auf? Geben Sie $u_{21}(x,\,y,\,t)$ und $u_{12}(x,\,y,\,t)$ an und skizzieren Sie die Knotenlinien und die Orte der maximalen Auslenkungen.

b) Betrachten Sie die folgenden Überlagerungen der beiden Eigenschwingungen

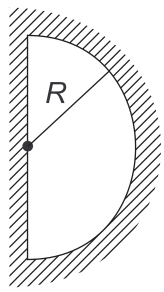
i) $u(x,\,y,\,t) = u_{21}(x,\,y,\,t) + u_{12}(x,\,y,\,t)$

ii) $u(x,\,y,\,t) = u_{21}(x,\,y,\,t) - u_{12}(x,\,y,\,t)$.

Bestimmen Sie die Knotenlinien dieser Schwingungen.

Aufgabe 23: Halbe Kreismembran (schriftlich, 8 Punkte)

Eine halbe Kreismembran mit Radius R (siehe Abbildung) ist am Rand fest eingespannt.



a) Geben Sie die Randbedingungen für die Auslenkungen $u(r,\,\varphi,\,t)$ an.

b) Bestimmen Sie – ausgehend von der aus der Vorlesung bekannten allgemeinen Lösung der entsprechenden Wellengleichung – die Eigenfrequenzen $\omega_{n,\,m}$ dieser Membran. Geben Sie die sieben niedrigsten Eigenfrequenzen explizit an.

Aufgabe 24: Erzwungene Schwingung einer Saite (mündlich, 12 Punkte)

Eine bei $x = 0$ und $x = l$ fest eingespannte Saite werde durch eine äußere Kraft mit der Frequenz Ω angeregt. Dies wird durch die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial x^2} = S(x)\,\cos(\Omega\,t)$$

beschrieben. $S(x)$ ist eine vorgegebene Funktion, die die Ortsabhängigkeit der äußeren Anregung beschreibt. Bei der Lösung der Wellengleichung erweist es sich als zweckmäßig, $S(x)$ als Fourierreihe darzustellen:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n\,\sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right) \ .$$

a) Verwenden Sie den Ansatz

$$u(x,\,t) = f(x)\,\cos(\Omega\,t) \qquad \text{mit} \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,\sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right) \ ,$$

um eine *spezielle* Lösung der inhomogenen Wellengleichung zu berechnen. Bestimmen Sie dazu die Koeffizienten f_n in Abhängigkeit von den Eigenfrequenzen ω_n der Saite und den Entwicklungskoeffizienten S_n.

b) Die *allgemeine* Lösung der Wellengleichung erhält man aus der Überlagerung der speziellen Lösung aus a) mit der allgemeinen Lösung der homogenen Wellengleichung. Zeigen Sie, dass für die Anfangsbedingung $u\,(x,\,0) = 0$ und $\dot{u}\,(x,\,0) = 0$ die Auslenkungen der Saite durch

$$u\,(x,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right)\,\frac{S_n}{\omega_n^2 - \Omega^2}\,\Big(\cos\,(\Omega\,t) - \cos\,(\omega_n\,t)\Big)$$

beschrieben werden.

c) Die anregende Frequenz Ω sei ungefähr gleich ω_1. Dann trägt in b) der Term mit $n = 1$ besonders stark zur Summe bei. Skizzieren Sie

$$p\,(t) = \frac{\cos\,(\Omega\,t) - \cos\,(\omega_1\,t)}{\omega_1^2 - \Omega^2}$$

als Funktion der Zeit für $\Omega = 1,1 \cdot \omega_1$. Berechnen Sie $p\,(t)$ im Grenzfall $\Omega \to \omega_1$.

Aufgabe 25: Wellenpaket (mündlich, 8 Punkte)

Ein eindimensionales Wellenpaket sei gegeben durch

$$f\,(x,\,t) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} A\,(k)\,\mathrm{e}^{i\,(k\,x - \omega\,(k)\,t)}\,d\,k \qquad \text{mit} \qquad A\,(k) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\,\sigma^2}}\ .$$

Dieses Wellenpaket breite sich in einem dispersiven Medium mit der Dispersionsrelation

$$\omega\,(k) = \omega_0 + a\,(k - k_0) + \frac{b}{2}\,(k - k_0)^2$$

aus.

a) Berechnen Sie $f\,(x,\,t)$. (*Hinweis*: Es ist nützlich, die Abkürzung $h^2 = 1/\sigma^2 + i\,b\,t$ zu verwenden.)

b) Berechnen Sie $|f\,(x,\,t)|$. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das Maximum von $|f\,(x,\,t)|$?

c) Die Breite des Wellenpaketes sei durch den Abfall der Amplitude von $|f\,(x,\,t)|$ auf 1/e des maximalen Wertes definiert. Berechnen Sie die Breite als Funktion der Zeit.

Aufgabe 26: Lineare Kette von $L\,C$-Gliedern (schriftlich, 5 Punkte)

Zeigen Sie, dass in der skizzierten Anordnung elektrische Wechselströme ungedämpft fließen können, wenn ihre Frequenz kleiner als $\omega_{\max} = 2/\sqrt{L\,C}$ ist.

Stellen Sie dazu durch Betrachtung der Ströme und Spannungen eine Differentialgleichung für die Spannung U_n auf und lösen Sie diese durch den Ansatz $U_n = u_0\,\mathrm{e}^{i\,k\,n}\,\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t}$, der analog zum Ausdruck für eine Welle längs der x-Achse $u\,(x,\,t) = A\,\mathrm{e}^{i\,k\,x}\,\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t}$ gebildet ist. Dabei ist k die Phasendifferenz von Strom oder Spannung zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern.