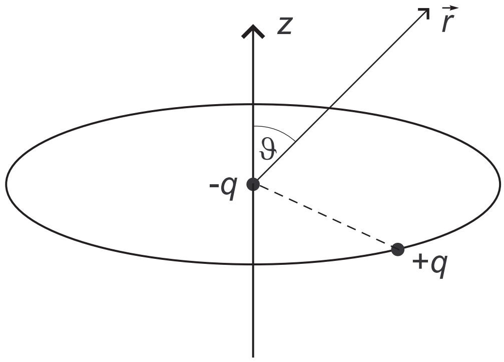
Aufgabe 27: Strahlung eines rotierenden Dipols (schriftlich, 10 Punkte)

Ein Teilchen der Ladung q bewege sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn (Radius d), in deren Mittelpunkt ein Teilchen mit der Ladung $-q$ ruht. Dieses System stellt einen Dipol $\vec{p}$ dar, der mit ω um eine senkrecht zu $\vec{p}$ orientierte Achse rotiert.



Berechnen Sie unter Verwendung der aus der Vorlesung bekannten Resultate für die Strahlung eines beliebigen Dipols den Poynting-Vektor $\vec{S}$ dieses Systems in der *Fernzone*. Stellen Sie dabei $\vec{S}$ in Abhängigkeit von den Kugelkoordinaten $(r,\, \vartheta,\, \varphi)$ dar.

Wie groß ist die zeitlich und räumlich gemittelte Strahlungsleistung

$$\overline{P}_{\text{Strahl}} = \frac{1}{T} \int_0^T \oint \vec{S} \cdot d\vec{f}\, dt \; ?$$

Vergleichen Sie Ihre Resultate mit dem Ergebnis aus der Vorlesung für einen Dipol

$$\vec{p} = (0,\, 0,\, p_0 \sin(\omega t)) \; ,$$

der durch eine Schwingung zweier Ladungen entlang der z-Achse zu Stande kommt.

Aufgabe 28: Lineare Sendeantenne (schriftlich, 10 Punkte)

Beim Vorliegen einer kontinuierlichen Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},\, t)$ ist das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},\, t)$ durch

$$\vec{A}(\vec{r},\, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \int \vec{j}\left(\vec{r}\,',\, t - \frac{r}{c}\right) d^3 r' := \frac{\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie $\dot{\vec{p}}$ für das einfache Modell einer linearen Antenne (Länge l) mit der Stromverteilung

$$\vec{j}(\vec{r},\, t) = \begin{cases} I_0\, \delta(x)\, \delta(y) \left(1 - \frac{|z|}{l} \cdot 2\right) \cos(\omega t)\, \vec{e}_z & \text{für} \quad -\frac{l}{2} \le z \le \frac{l}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

b) Bestimmen Sie die zeitlich gemittelte Strahlungsleistung $\overline{P}_{\text{Strahl}}$ in der Fernzone.

Aufgabe 29: Nützliche Relationen (mündlich, 8 Punkte)

Bei der theoretischen Beschreibung der elektrischen und magnetischen Dipolstrahlung treten skalare und vektorwertige Funktionen auf, die von dem Argument $t - \frac{r}{c}$ abhängen. Dabei ist

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \; .$$

Bei den Rechnungen ist es zweckmäßig, die Ortsableitungen der Funktionen durch Zeitableitungen darzustellen.

Zeigen Sie, dass für $\tilde{t} = t - \frac{r}{c}$ folgende Relationen gelten:

i) $\operatorname{grad} f(\tilde{t}\,) = -\frac{\vec{r}}{c\,r}\,\dot{f}(\tilde{t}\,)$

ii) $\operatorname{rot} \vec{a}(\tilde{t}\,) = \frac{1}{c\,r}\,\dot{\vec{a}}(\tilde{t}\,) \times \vec{r}$

iii) $\operatorname{rot} \left(\vec{a}(\tilde{t}\,) \times \vec{r}\right) = 2\,\vec{a}(\tilde{t}\,) + \frac{1}{c\,r}\left(\dot{\vec{a}}(\tilde{t}\,) \times \vec{r}\right) \times \vec{r}$

iv) $\operatorname{div} \left(\vec{a}(\tilde{t}\,) \times \vec{r}\right) = 0 \; .$

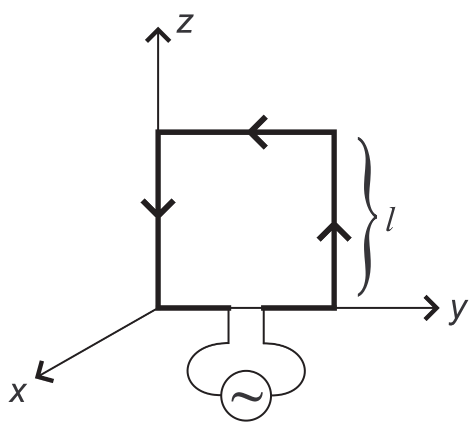
Aufgabe 30: Dipolstrahlung (mündlich, 12 Punkte)

Eine quadratische Leiterschleife (Kantenlänge l), die in der y-z-Ebene liegt, werde von einem Wechselstrom

$$I(t) = I_0 \cos(\omega\, t)$$

durchflossen.

(Der Strom in den Zuleitungen soll bei den folgenden Betrachtungen vernachlässigt werden.)



a) Geben Sie die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},\, t)$ an.

b) Berechnen Sie die zeitliche Änderung $\dot{\vec{p}}$ des elektrischen Dipolmomentes und die zeitliche Änderung $\dot{\vec{m}}$ des magnetischen Dipolmomentes.

c) Geben Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ der Dipolstrahlung in der Fernzone an.

d) Wie groß ist die zeitlich gemittelte abgestrahlte Leistung dieser Rahmenantenne?