

Aufgabe 31: Magnetisches Dipolfeld**(mündlich, 12 Punkte)**

Der magnetische Dipolanteil $\vec{m}(t)$ der Stromdichte führt auf ein Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\dot{\vec{m}}(\tilde{t}) \times \vec{r}}{c^3 r^2} + \frac{\vec{m}(\tilde{t}) \times \vec{r}}{c^2 r^3} \right)$$

und ein verschwindendes skalares Potential. Dabei ist $\tilde{t} = t - \frac{r}{c}$. Berechnen Sie die zugehörigen elektrischen und magnetischen Felder. Welche Anteile der Felder sind in der Nahzone besonders groß?

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass für einen Vektor \vec{d} gilt:

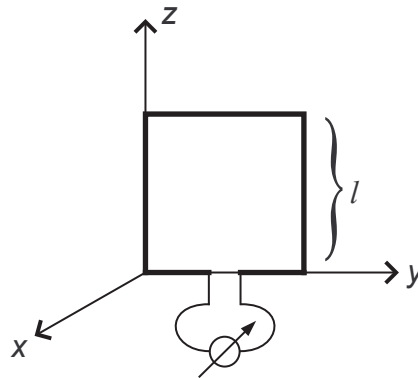
$$(\vec{d} \times \vec{r}) \times \vec{r} = \vec{r}(\vec{d} \cdot \vec{r}) - \vec{d}r^2.$$

Aufgabe 32: Empfangsantenne**(schriftlich, 10 Punkte)**

Ein quadratische Leiterschleife (Kantenlänge l), die in der y - z -Ebene liegt, befinde sich im Feld

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (0, 0, E) \cos(ky - \omega t)$$

einer ebenen Welle.



- Bestimmen Sie das zu \vec{E} gehörige magnetische Feld \vec{B} .
- Berechnen Sie die induzierte Ringspannung U_{ind} unter Verwendung
 - des \vec{E} -Feldes
 - des \vec{B} -Feldes.

Wie groß ist der maximale Wert von $|U_{\text{ind}}|$ während einer Schwingung?

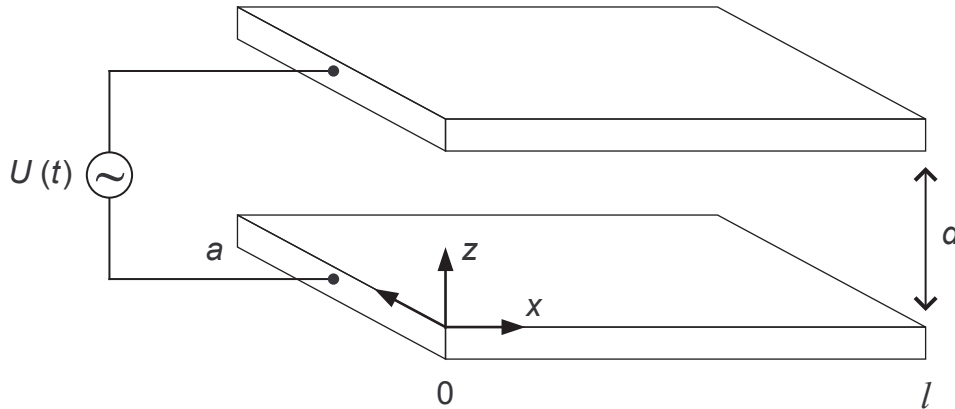
- Welche Ringspannung ergibt sich für
 - $l = n \cdot \lambda$ ($n = 1, 2, \dots$)
 - $l = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda$ ($n = 0, 1, \dots$)
 - $l \ll \lambda$.

Welche Kantenlänge würden Sie für eine Antenne wählen, damit Sie sowohl UKW- als auch MW-Sender empfangen können?

- Wie groß ist U_{ind} , wenn die Leiterschleife in der x - z -Ebene liegt?

Aufgabe 33: Doppelleiter**(mündlich, 8 Punkte)**

Ein Doppelleitersystem bestehe aus zwei, im Abstand d angebrachten rechteckförmigen Metallplatten der Größe $a \cdot l$. Es sei $d \ll a \ll l$.



Wir betrachten zunächst den Fall unendlich langer Platten $l \rightarrow \infty$. Durch Anlegen einer Wechselspannung der Frequenz ω wird zwischen den Platten ein elektrisches Feld $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z \cos(kx - \omega t)$ erzeugt. (Randeffekte bei $y = 0$ und $y = a$ bleiben unberücksichtigt.)

- Berechnen Sie das zugehörige Magnetfeld \vec{B} .
- Berechnen Sie die Spannung $U(x, t)$ zwischen den Platten.
- Die Felder induzieren in der unteren Platte eine Flächenstromdichte

$$\vec{j}_F^{(u)}(x, y, t) = \varepsilon_0 c E_0 \vec{e}_x \cos(kx - \omega t).$$

In der oberen Platte hat diese Dichte die Form

$$\vec{j}_F^{(o)}(x, y, t) = -\vec{j}_F^{(u)}(x, y, t).$$

Zeigen Sie, dass \vec{j}_F der Randbedingung $\vec{n} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{j}_F$ genügt.

- Berechnen Sie den Strom $I(x, t)$ auf den Platten. Wie groß ist der Wellenwiderstand

$$Z_0 = \frac{U(x, t)}{I(x, t)}$$

dieses Wellenleiters?

Hinweis: Die flächenartige Stromdichte ist z. B. auf der unteren Platte durch

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \delta(z) \vec{j}_F^{(u)}(x, y, t)$$

mit der üblichen Stromdichte verknüpft.

- Wie sehen \vec{E} und \vec{B} für ein System der endlichen Länge l aus, wenn man bei $x = l$ einen Widerstand der Größe Z_0 anbringt?

Aufgabe 34: TM-Wellen im Hohlleiter**(schriftlich, 10 Punkte)**

Gegeben sei ein in z -Richtung unendlich ausgedehnter Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt der Kantenlängen a und b , in dem sich elektromagnetische Wellen ausbreiten können.

a) Wellen mit $\vec{B}_\perp \vec{e}_z$ bezeichnet man als transversal magnetische (TM) Wellen. Sie haben die Form

$$B_x = B_{0x} \cdot \sin(k_x x) \cdot \cos(k_y y) \cdot \cos(k_z z - \omega t)$$

$$B_y = B_{0y} \cdot \cos(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot \cos(k_z z - \omega t)$$

$$B_z = 0.$$

Zeigen Sie, dass diese Form des \vec{B} -Feldes die Randbedingungen und die Maxwell-Gleichungen erfüllt. Welche Werte können k_x und k_y annehmen? Wie müssen B_{0x} und B_{0y} zusammenhängen?

b) Berechnen Sie das elektrische Feld der TM-Wellen.

c) Geben Sie für den Fall $a = b$ die Dispersionsrelation $\omega_{n_x, n_y}(k_z)$ des Hohlleiters an.

Wie groß ist die kleinstmögliche Frequenz für die TM-Wellen in Abhängigkeit von k_z ?

Skizzieren Sie diese Dispersionsrelation.