Aufgabe 9: Wasserstoffähnliche Systeme (3 Punkte)

Wasserstoffähnliche Systeme sind solche, deren Hamiltonoperator die gleiche Struktur wie der Wasserstoff-Hamiltonoperator hat. Ihre reduzierte Masse μ und/oder ihre Kernladung unterscheidet sich allerdings vom Wasserstoffatom.

Geben Sie das Energiespektrum der gebundenen Zustände und den Bohr'schen Radius für die folgenden Systeme an:

a) Deuterium und Tritium. Wie sehr unterscheiden sich die Energien von denen des H-Atoms?

b) Ionen mit Z-fach geladenem Kern und nur einem Elektron, z. B. He^+, Li^{++}, ... Na^{10+}, ... U^{91+}. Geben Sie für diese Ionen auch die Bindungsenergie und den Bohr'schen Radius explizit in eV bzw. Å an. Die Bindungsenergie des Elektrons ist der Betrag der Grundzustandsenergie.

   Überlegen Sie sich dazu erst, warum man *hier* die Änderung der reduzierten Masse nicht zu berücksichtigen braucht.

Aufgabe 10: Zum Wasserstoffatom (8 Punkte)

Sie haben die Eigenfunktionen des Wasserstoffproblems

$$\psi_{nlm}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

kennengelernt (siehe EQM und/oder „Materialien zur QT“).

a) Wie verhält sich die Radialfunktion $R_{nl}(r)$ für kleine r? Wieviel Knoten hat die Radialfunktion? Warum? Skizzieren Sie für $n = 2$ alle möglichen Radialfunktionen.

b) Wir hatten die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte im Zustand $\psi_{nlm}(\mathbf{r})$ als

$$P_{nl}(r) := 4\,\pi\, r^2\, R^2_{nl}(r)$$

   definiert. Berechnen Sie die Lage der Minima und Maxima von $P_{nl}(r)$ für $1\,s$-, $2\,s$- und $2\,p$-Zustände. Skizzieren oder zeichnen Sie $P_{nl}(r)$ für die drei Fälle.

c) Ein Elektron befinde sich im $1\,s$-Zustand. Wie groß ist der prozentuale Anteil der Ladung des Elektrons, der sich in einer Kugel vom Radius a_B um den Kern befindet?

Aufgabe 11: Wasserstoff-Eigenzustände mit maximalem Drehimpuls (7 Punkte)

Die Lösungen des Wasserstoffproblems sind durch

$$\psi_{nlm}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

gegeben. Betrachten Sie die Radialfunktion zu maximaler Drehimpulsquantenzahl $l = n - 1$. Wie wir aus der EQM wissen, hat sie die Gestalt

$$R_{n,\,l=n-1}(r) = N_n\, r^{n-1}\, \mathrm{e}^{-\frac{r}{n\,a_B}} \; .$$

a) Geben Sie die Normierungskonstante an, indem Sie sie entweder ausrechnen oder aus den bekannten Lösungen entnehmen.

b) Berechnen Sie die Lage des Maximums $r_{\max}(n)$ der radialen Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte für obige Zustände.

c) Berechnen Sie $\langle r \rangle$ und $\langle r^2 \rangle$.

d) Berechnen Sie die absolute und die relative Unschärfe $\sigma(r)$ und $\sigma(r)/\langle r \rangle$.

Diskutieren Sie den Übergang zum klassischen Verhalten für sehr große n.

Hinweis:

$$\int_0^\infty r^n \, \mathrm{e}^{-\lambda r} \, d r = \frac{n!}{\lambda^{n+1}} \; .$$

Aufgabe 12: Theorem von Unsöld (4 Punkte)

Nach einem Theorem von Unsöld haben abgeschlossene Unterschalen eines Atoms oder Ions zu fester Drehimpulsquantenzahl l eine sphärisch symmetrische Ladungsdichte. Als abgeschlossene Unterschale bezeichnet man dabei eine Schale, in der bei festem l alle möglichen m realisiert sind.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Kugelfunktionen zu $l = 0$, 1 und 2 explizit, dass die Summe der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichten von abgeschlossenen s-, p- oder d-Schalen des Wasserstoffatoms kugelsymmetrisch sind.

b) Erraten Sie das allgemeine Gesetz für

$$\rho_{n,\,l}(r) = \sum_{m=-l}^{+l} \rho_{n,\,l,\,m}(\mathbf{r})$$

und beweisen Sie es mit Hilfe des Additionstheorems der Kugelfunktionen, das hier in der Form

$$\sum_{m=-l}^{+l} Y_{l,\,m}(\vartheta,\,\varphi)\, Y^*_{l,\,m}(\vartheta,\,\varphi) = \frac{2\,l+1}{4\,\pi} P_l(\cos\eta = 1)$$

verwendet werden kann.