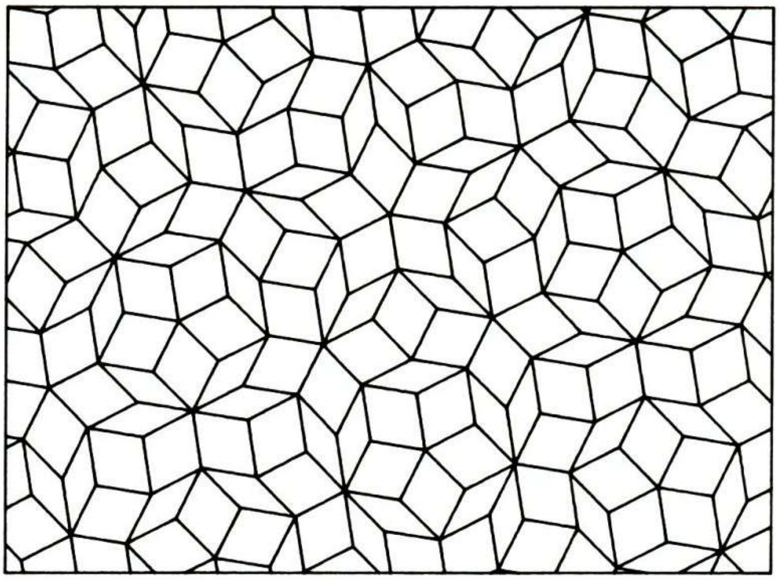
Übungen zur theoretischen Festkörperphysik I - Zettel 1

Wintersemester 11/12 Abgabe: 02.11. 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Merkwürdige Muster (3P)



Betrachten Sie oben abgebildetes Muster und diskutieren Sie, ob das Muster ein Kristallgitter darstellt (Stichworte: Symmetrie, Translationsinvarianz, Raumausfüllung).

Aufgabe 2: Reziprokes Gitter (3P)

Folgende Vektoren bilden die Einheitszelle eines 3-dimensionalen Gitters mit den Konstanten a und c

$$\vec{a}_1 = \frac{\sqrt{3}a}{2}\vec{e}_x + \frac{a}{2}\vec{e}_y, \qquad \vec{a}_1 = -\frac{\sqrt{3}a}{2}\vec{e}_x + \frac{a}{2}\vec{e}_y, \qquad \vec{a}_1 = c\vec{e}_z.$$

a) Was für ein Kristall-Gitter wird durch die Vektoren beschrieben?

b) Berechnen Sie das Volumen V der primitiven Einheitszelle.

c) Berechnen Sie die reziproken Gittervektoren.

Aufgabe 3: Reziprokes Gitter des reziproken Gitters (2P)

Zeigen Sie, dass das reziproke Gitter des reziproken Gitters wieder das ursprüngliche Gitter ist.

Aufgabe 4: Beugungsbild einer linearen Kette (2P)

Die Gitterplätze einer linearen Kette mit der Gitterkonstanten a können durch einen Kamm von δ-Funktionen beschrieben werden

$$f(x) = \sum_n \delta(x - na).$$

Fourier-transformieren Sie $f(x)$ in den reziproken Raum und treffen Sie eine Aussage über die Abstände der Peaks im Beugungsbild.

Aufgabe 5: Born-Oppenheimer-Näherung für 2 gekoppelte Massen (10P)

Wir betrachten den Hamiltonoperator zweier Teilchen der Massen M und m mit $M \gg m$ in einer Dimension

$$H = \frac{p_1^2}{2M} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2$$

a) Was für ein System beschreibt der Hamiltonoperator?

b) Berechnen Sie die Eigenenergien des Systems. Gehen Sie dazu wie folgt vor: Transformieren Sie den Hamiltonoperator in folgende Form

$$H = \frac{1}{2}\vec{\tilde{p}}^T\vec{\tilde{p}} + \frac{1}{2}\vec{\tilde{x}}^T\Omega\vec{\tilde{x}}$$

mit $\vec{\tilde{p}}^T = (\tilde{p_1}, \tilde{p_2}) = (p_1/\sqrt{M}, p_2/\sqrt{m})$ und $\vec{\tilde{x}}^T = (\tilde{x_1}, \tilde{x_2}) = (x_1\sqrt{M}, x_2\sqrt{m})$ und der Matrix Ω. Die Eigenfrequenzen lassen sich durch Diagonalisierung von Ω berechnen.

c) Benutzen Sie nun die Born-Oppenheimer-Näherung um die Eigenenergien zu bestimmen. Vernachlässigen Sie dazu zunächst die Bewegung der schweren Masse M und betrachten Sie die Bewegung der leichten Masse m. Danach betrachten Sie die schwere Masse M im gerade berechneten effektiven Potential.

d) Vergleich Sie die Ergebnisse aus b) und c).