Übungen zur theoretischen Festkörperphysik I - Zettel 5

Wintersemester 11/12 Abgabe: 24.01. (idV)

Aufgabe 19: Bandstruktur und Zustandsdichte (4P)

Ordnen Sie die Bandstrukturen 1-3 den Zustandsdichten a-c zu und begründen Sie kurz Ihre Antwort. Die gestrichelte Linie markiert dabei die Fermi-Kante. Was für ein elektronisches Verhalten (metallisch, isolierend) erwarten Sie?

Aufgabe 20: Freie Elektronen in 2D (4P)

Wir betrachten freie Elektronen in 2 Dimensionen mit der Dispersion

$$E(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2)$$

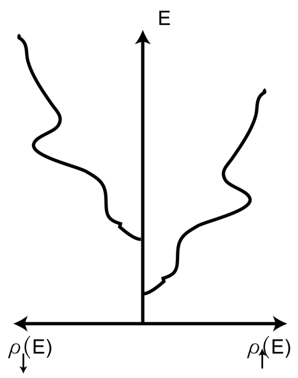
a) Wie lautet die Zustandsdichte $\rho(E)$ für die Elektronen?

b) Stellen Sie einen Zusammenhang her zwischen der Gesamt-Elektronenzahl N und der Fermiwellenzahl k_F bzw. der Fermi-Energie E_F.

c) Rechnen Sie die Zahl der Elektronen pro Einheitszelle $Z_e = \int dE \rho(E) f(E)$ ($f(E)$=Fermi-Funktion) aus.

d) Berechnen Sie für $Z_e = 1$ das chemische Potential $\mu(T)$ und stellen Sie es mit Hilfe der Fermienergie dar.

Aufgabe 21: Stoner-Kriterium (5P)



Im Stoner-Modell nimmt man an, dass die Energiebänder sich gemäß ihrer Spineinstellung auf Grund der Austauschwechselwirkung aufteilen. Dabei ist ein Band um $\frac{1}{2} I \Delta n$ nach oben und das andere um den selben Wert nach unten verschoben:

$$E_\uparrow(\vec{k}) = E(\vec{k}) - \frac{1}{2} I \Delta n \qquad E_\downarrow(\vec{k}) = E(\vec{k}) + \frac{1}{2} I \Delta n$$

$E(\vec{k})$ ist das unverschobene Band und $\Delta n = (n_\uparrow - n_\downarrow)$ ist die Anzahl der Elektronen mit Spin $\uparrow, \downarrow$. I ist der Stoner Parameter.
In diesem Modell kann man das Stoner-Kriterium

$$1 < \tilde{\rho}(E_F) I$$

herleiten, das eine Bedingung für die Existenz eines ferromagnetischen Zustands in einem Material liefert. Dabei beschreibt $\tilde{\rho}(E_F) = \frac{1}{2}\rho_0(E_F)$ die unverschobene Zustandsdichte $\rho_0(E)$ an der Fermikante. Leiten Sie in dieser Aufgabe das Stoner-Kriterium im Stoner-Modell her. Gehen Sie dazu wie folgt vor: Berechnen Sie Δn über $n_{\uparrow/\downarrow} = \int dE \rho_{\uparrow/\downarrow}(E) f(E)$ mit $f(E)$ der Fermi-Dirac-Statistik. Drücken Sie das Integral mit hilfe von $\tilde{\rho}$ aus, sodass die Bandschiebung nun in f

steht. Entwickeln Sie f um E bis zur 3. Ordnung. Benutzen Sie die Näherung $\frac{\partial f}{\partial E} \approx -\delta(E - E_F)$. Überlegen Sie sich dann, dass die Magnetisierung $M = \Delta n \mu_B$ (μ_B: Bohrsches Magneton) und somit Δn ungleich null sein muss, damit ein Material ferromagnetisch ist. Überlegen Sie sich, dass der Term $\sim \frac{\partial^3 f}{\partial E^3}$ kleiner Null ist und was daraus für $\tilde{\rho}(E_F)I$ folgt.

Aufgabe 22: Teilchen-Loch-Symmetrie (4P)

Wir betrachten ein System von Fermionen mit Spin $S = \frac{1}{2}$ und endlich vielen Ein-Teilchen-Energieniveaus $E_r, r = 1, 2, \ldots M$ bei der Temperatur T.

a) Wie groß kann der Erwartungswert der Teilchenzahl $\langle N \rangle$ maximal sein?

b) Wie lautet die großkanonische Zustandssumme Ξ?

c) Betrachten Sie nun die freie Energie F des System und vergleichen Sie sie mit der freien Energie, wenn man $2M - \langle N \rangle$ Löcher mit dem chemischen Potential $-\mu$ auf die Energieniveaus $-E_r$ verteilt. Benutzen Sie dazu die Beziehung $F = -k_B T \ln \Xi + \mu \langle N \rangle$. Zeigen Sie, dass die thermodynamischen Eigenschaften gleich bleiben.
Tipp: Erweitern Sie das Argument des ln mit $e^{-\beta(E_r - \mu)}$.

Aufgabe 23: Dispersionsrelation eines Quantenfilms (3P)

Ein Quantenfilm ist eine Halbleiter-Heterostruktur, in der die Elektronen in einer Raum-Dimension beschränkt sind. Das einfachste Modell ist ein unendlicher Potentialtopf in z-Richtung, während in x, y-Richtung kein Potential vorliegt, d.h.:

$$V(x, y, z) = V(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq z \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösen Sie die 3-dimensionale zeitunabhängige Schrödingergleichung mit Hilfe eines Separationsansatz und geben Sie Eigenfunktionen und Energien an. Skizzieren Sie die Dispersionsrelation der Teilchen.