

Seminar zur Theorie der Atome, Kerne und  
kondensierten Materie

Kohärente Zustände des harmonischen Oszillators

Thomas Biekötter

16.11.2011

## 1 Klassischer harmonischer Oszillator

Der klassische harmonische Oszillator wird in einer Dimension durch die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (1)$$

beschrieben. Aus den kanonischen Gleichungen folgt die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \quad (2)$$

Die Lösung ist eine harmonische Schwingung:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad p(t) = p_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (3)$$

Im Phasenraum, der durch die Orts- und Impulskoordinaten aufgespannt wird, ergibt sich eine um den Ursprung verlaufende ellipsenförmige Trajektorie, die im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. In geeigneten Koordinaten ist die Trajektorie kreisförmig.

## 2 Quantenmechanischer harmonischer Oszillator

In der Quantenmechanik geht man über zum Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 \quad (4)$$

und löst die stationäre Schrödingergleichung  $\hat{H}|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$ . Durch die Wahl der dimensionslosen Koordinaten

$$H = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} \quad \epsilon = \frac{E}{\hbar\omega} \quad x = \hat{x} \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \quad p = -\frac{i}{2} \frac{d}{dx} \quad (5)$$

findet man eine besonders einfache Darstellung des Hamiltonoperators:

$$H = x^2 + p^2 \quad (6)$$

Ausgedrückt durch den Vernichtungs- und Erzeugungsoperator

$$a = (x + ip) \quad \text{und} \quad a^\dagger = (x - ip) \quad \text{mit} \quad [a, a^\dagger] = 1 \quad (7)$$

hat der Hamiltonoperator die Form:

$$H = (a^\dagger a + \frac{1}{2}) \quad (8)$$

Mit Hilfe der Eigenwertgleichungen für den Besetzungszahloperator  $\hat{n} = a^\dagger a$  und der Gleichungen für die Leiteroperatoren

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (9)$$

wobei die Quantenzahl  $n$  ganzzahlig von 0 bis  $\infty$  läuft, ergibt sich nach Rücktransformation in die ursprünglichen dimensionsbehafteten Größen für die Eigenenergien und die Eigenzustände des harmonischen Oszillators in Ortsdarstellung:

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{n!2^n}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \quad (10)$$

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (11)$$

Berechnet man die Erwartungswerte von Ort  $\langle x \rangle$  und Impuls  $\langle p \rangle$  findet man

$$\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0 \text{ für alle Quantenzahlen } n, \quad (12)$$

was der klassischen Erwartung widerspricht. Auch die Unschärfen von Ort und Impuls verhalten sich nicht, wie man es nach klassischer Physik erwarten würde, da dort Ort und Impuls exakt bestimmt sind.

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (13)$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (14)$$

In dimensionslosen Koordinaten wachsen die Unschärfen von Ort und Impuls mit  $n$  und sind gleich groß. Die nach der Heisenbergschen Unschärferelation minimal zulässige Unschärfe wird nur für den Grundzustand erreicht. Insgesamt spricht man davon, dass sich die Eigenzustände des harmonischen Oszillators nicht-klassisch verhalten.

### 3 Kohärente Zustände

Man sucht nach einem Zustand, der besser zu den klassischen Erwartungen passt, und findet die kohärenten Zustände. Kohärente Zustände entstehen aus dem Grundzustand

$$\varphi_0(x) = \left(\frac{\kappa^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\kappa^2 x^2} \quad \text{mit } \kappa = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \quad (15)$$

durch eine instantane Verschiebung des Potentials. Die Verschiebung kann durch einen Parameter  $\alpha$  charakterisiert werden:

- $x_0 = \sqrt{2}\frac{\alpha}{\kappa}$  nach links.
- $m\omega\frac{x_0^2}{2} = \alpha^2\hbar\omega$  nach unten.

Der kohärente Zustand hat dann die Form

$$\varphi_{coh}(x) = \left(\frac{\kappa^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\kappa x - \sqrt{2}\alpha)^2} \quad (16)$$

Dieser Zustand ist kein Eigenzustand des Hamiltonoperators mehr. Das bedeutet, dass sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte mit der Zeit ändert und dass eine Messung der Energie zu einer Energieverteilung führt. Die Energieverteilung  $W_n$  ergibt sich aus dem Betragsquadrat des Skalarprodukts des kohärenten Zustands und eines Eigenzustands.

$$\langle n | \varphi_{coh} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_{coh}(x) dx = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \quad (17)$$

$$W_n = \frac{\alpha^{2n}}{n!} e^{-\alpha^2} \quad (18)$$

Die Wahrscheinlichkeit, an einem kohärenten Zustand die Energie des Zustandes  $|n\rangle$  zu messen, ist Poisson-verteilt.

Aus Gleichung 17 kennen wir außerdem die Zerlegung des kohärenten Zustands nach den Eigenfunktionen:

$$|\psi_{coh}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\alpha^2/2} |n\rangle \quad (19)$$

Hierauf kann man den Zeitentwicklungsoperator  $U = \exp(-\frac{i}{\hbar} Ht)$  anwenden, um die zeitliche Entwicklung zu bestimmen. Die zeitabhängige Wellenfunktion hat in Ortsdarstellung folgende Form:

$$\begin{aligned} \psi_{coh}(x, t) &= \left(\frac{\kappa^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\kappa x - \sqrt{2}\text{Re}(\alpha e^{-i\omega t}))^2\right) \\ &\quad \exp\left(i\hbar\kappa\sqrt{2}\text{Im}(\alpha e^{-i\omega t})\frac{x}{\hbar}\right) \exp\left(-i\left(\frac{\omega t}{2} + \text{Re}(\alpha e^{-i\omega t})\text{Im}(\alpha e^{-i\omega t})\right)\right) \end{aligned}$$

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte

$$|\psi_{coh}(x, t)|^2 = \frac{\kappa}{\sqrt{\pi}} e^{-\kappa^2(x - \bar{x}(t))^2} \quad \text{mit} \quad \bar{x}(t) = \frac{\sqrt{2}}{\kappa} \text{Re}(\alpha e^{-i\omega t}) \quad (20)$$

ist ein formstabiles Gaußpaket und schwingt harmonisch um den Ursprung.

Eine noch allgemeinere Definition der kohärenten Zustände gelingt durch den Verschiebungsoperator  $D(\alpha) = e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)}$ . Die Verallgemeinerung besteht darin, dass der Parameter  $\alpha$  eine komplexe Zahl ist. Der kohärente Zustand entsteht, indem man den Verschiebungsoperator auf den Grundzustand wirken lässt:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)}|0\rangle \quad (21)$$

Das lässt sich zeigen, indem man  $D(\alpha)$  mit der Baker-Hausdorff-Formel umschreibt zu

$$D(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}. \quad (22)$$

Angewendet auf den Grundzustand ergibt sich der kohärente Zustand:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (23)$$

## 4 Wignerfunktion

In der klassischen Physik kann die Dynamik eines Teilchen im Phasenraum beschrieben werden. In der Quantenmechanik ist das in dieser Weise nicht möglich, da man wegen der Unbestimmtheitsrelation dem Teilchen keinen exakten Punkt im Phasenraum zuordnen kann. Mit Hilfe der Wignerfunktion gelingt es, einen quantenmechanischen Einteilchenzustand mit einem Ensemble von Teilchen der klassischen Physik zu vergleichen. Die Wignerfunktion

$$W(x, p, t) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\frac{i}{\hbar}p\xi} \langle x + \frac{\xi}{2} | \hat{\rho} | x - \frac{\xi}{2} \rangle \quad (24)$$

bzw. für reine Zustände mit  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$

$$W(x, p, t) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\frac{i}{\hbar}p\xi} \psi^*(x - \frac{\xi}{2}, t) \psi(x + \frac{\xi}{2}, t) \quad (25)$$

folgt in ihrer zeitlichen Entwicklung der quantenmechanischen Liouville-Gleichung

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{dV(x)}{dx} \frac{\partial}{\partial p} \right) W(x, p, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \frac{d^{2l+1}V(x)}{dx^{2l+1}} \frac{\partial^{2l+1}}{\partial p^{2l+1}} W(x, p, t). \quad (26)$$

Für harmonische Potentiale ist die rechte Seite der Gleichung wegen der mindestens dreifachen Ableitungen des Potentials nach dem Ort gleich 0. Die Gleichung reduziert sich dann auf die klassische Liouville-Gleichung, die in der klassischen Physik die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Ensembles von Teilchen bestimmt. Die Wignerfunktion eines Teilchens im harmonischen Potential verhält sich demnach wie die klassische Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Vielteilchenzustands des klassischen harmonischen Oszillators.

Zusätzlich lassen sich aus der Wignerfunktion durch Integration die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte und die Wahrscheinlichkeitsdichte des Impulses bestimmen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x, p) dp = W(x) \quad \int_{-\infty}^{\infty} W(x, p) dx = W(p) \quad (27)$$

Berechnet man die Wignerfunktion der Energieeigenzustände

$$W_{|n\rangle}(x, p) = \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} e^{-2\epsilon(x, p)} L_n(4\epsilon(x, p)), \quad (28)$$

wobei  $\epsilon(x, p)$  die klassische Gesamtenergie in Einheiten von  $\hbar\omega$  ist, erkennt man, dass die Wignerfunktion negative Werte annimmt (siehe Abbildung 1). Hier wird deutlich, dass die Wignerfunktion nicht direkt als Wahrscheinlichkeitsverteilung betrachtet werden darf.

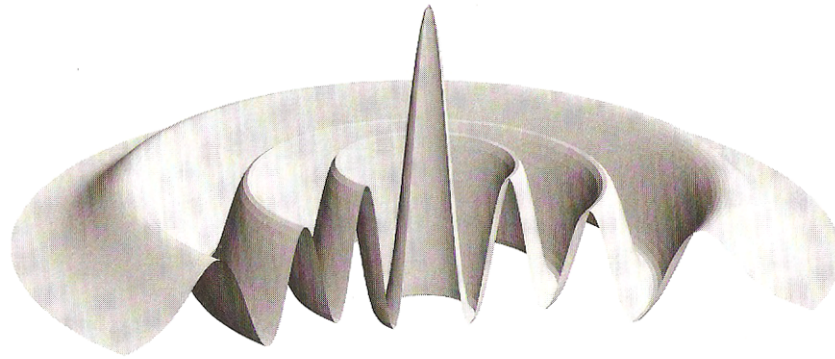


Abbildung 1: Wignerfunktion des 6. Energieeigenzustands des harmonischen Oszillators

## 5 Kohärente Zustände im Phasenraum

Setzt man die zeitabhängige Wellenfunktion eines kohärenten Zustands zum Zeitpunkt  $t = 0$  in die Definition der Wignerfunktion ein, erhält man:

$$W(x, p, 0) = \frac{1}{\pi\hbar} \cdot \exp(-(\kappa x - \sqrt{2}\alpha)^2 + (\frac{p}{\hbar\kappa})^2) \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R} \quad (29)$$

Die Wignerfunktion ist eine Gaußglocke im zweidimensionalen Phasenraum und

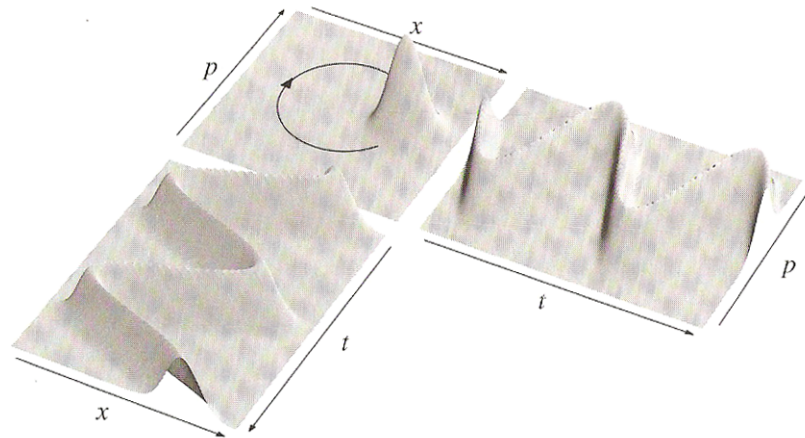


Abbildung 2: Wignerfunktion eines kohärenten Zustands für  $\alpha = 2$

insbesondere überall positiv. Deswegen kennen wir die zeitliche Entwicklung der Wignerfunktion aus der Liouville-Gleichung. Ein klassisches Teilchen rotiert im Phasenraum im Uhrzeigersinn um den Ursprung, demnach macht eine klassische Wahrscheinlichkeitsverteilung mehrerer Teilchen und schließlich die Wignerfunktion nichts anderes. Die zeitabhängige Wignerfunktion hat also folgende Form:

$$W(x, p, t) = \frac{1}{\pi\hbar} \cdot e^{[-(\cos(\omega t)\kappa x - \sin(\omega t)\frac{p}{\hbar\kappa}\sqrt{2}\alpha)^2 - (\sin(\omega t)\kappa x + \cos(\omega t)\frac{p}{\hbar\kappa})^2]} \quad (30)$$

In Abbildung 2 ist die Wignerfunktion eines kohärenten Zustands dargestellt. Der Kreis mit dem Pfeil deutet die Rotation der Wignerfunktion um den Ursprung an. Außerdem sind die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte und die Wahrscheinlichkeitsdichte des Impulses in Abhängigkeit von der Zeit eingezeichnet.

Man erkennt, dass sich der kohärente Zustand "quasi-klassisch" verhält. Er oszilliert genau wie ein klassisches Teilchen. Die Erwartungswerte sind:

$$\langle x \rangle_t = \frac{\sqrt{2}}{\kappa} \alpha \cos(\omega t) \quad \langle p \rangle_t = -\sqrt{2} \alpha \sin(\omega t) \quad (31)$$

Außerdem ist die gaußlockenförmige Wignerfunktion im Laufe der Zeit formstabil, die Unschärfen von Ort und Impuls sind also konstant. Man findet durch Berechnung der Unschärfen sogar, dass die Unbestimmtheitsrelation minimal erfüllt ist:

$$\Delta x \Delta p = \hbar/2 \quad (32)$$

## 6 Zusammenfassung

Während die Energieeigenzustände des harmonischen Oszillators unserer klassischen Erwartung nicht genügen, finden wir durch Superposition dieser Zustände zu kohärenten Zuständen weitaus zufriedenstellendere Ergebnisse. Ein kohärenter Zustand oszilliert und seine Unschärfe ist minimal.

Die Wignerfunktion macht das "nicht-klassische" Verhalten der Eigenzustände dadurch deutlich, dass negative Werte auftreten. Die Wignerfunktion kohärenter Zustände ist überall positiv, so dass man sie als "Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilung" im Phasenraum deuten kann. Ihre Dynamik entspricht der einer Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Ensembles von Teilchen im harmonischen Potential.

## 7 Literatur

- Wolfgang P. Schleich: Quantum Optics in Phase Space (Wiley-VCH)
- Wolfgang Nolting: Grundkurs Theoretische Physik 6, Statistische Physik (Springer)
- Jonas Daniels: Gequetschte Phononenzustände aus dem Zerfall optischer Phononen in Quantenpunkt-Strukturen (Diplomarbeit, Münster 2010)
- C. C. Gerry und P. L. Knight: Quantum superpositions and Schrödinger cat states in quantum optics (American Association of Physics Teachers)