

Elementare nichtlineare Dynamik anhand des „bouncing ball“ Problems

Seminar zur Theorie der Atome, Kerne und kondensierter Materie

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

BSc Physik

16. Dezember 2011

Patrick Hamers

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Näherungen	1
3	Impaktrelation	2
4	Herleitung der Grundgleichungen	3
5	High Bounce Approximation	5
6	Lösungen des Bouncing Ball Problems	6
6.1	Trapping Region	6
6.2	Gleichgewichtslösungen	7
6.3	Sticking Solutions	8
6.4	Periodische Lösungen	9
6.5	Chaotische Orbits	10
7	Zusammenfassung	11

1 Einleitung

Unter einem „bouncing ball“ versteht man allgemein eine Kugel bzw. einen Ball in einem Gravitationsfeld. Dabei kann dieser Ball auf einer starren oder angetriebenen Ebene (Aufprallebene) aufprallen und zurückgeworfen werden. Speziell für angetriebene Aufprallebenen können sich komplexe nichtlineare Systeme entwickeln, deren Verhalten es zu untersuchen gilt.

Im Folgenden wird das Verhalten einer Kugel im Gravitationsfeld der Erde mit sinusoidal angetriebener Tischplatte untersucht (siehe Abb. 1).

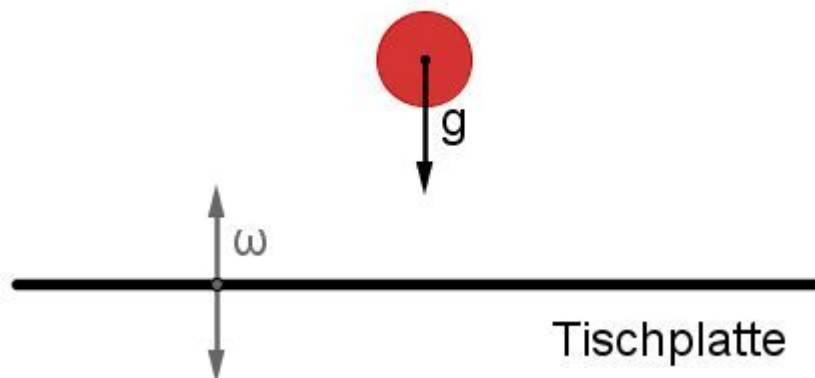


Abbildung 1: Bouncing Ball im Erdschwerefeld mit angetriebener Aufprallebene

2 Näherungen

Um das Problem des bouncing balls rechnerisch zu vereinfachen werden einige Näherungen angewandt.

- Der Ball bzw. die Kugel sei von punktförmiger Gestalt.
- Der Tisch sei flach ausgerichtet.
- Die Masse des Tisches sei wesentlich größer als die Masse des Balles
- Der Aufprall sei instantan.

Weiterhin wird der Restitutionskoeffizient $\varepsilon = \varepsilon(v)$ eingeführt, der als Maß für den Energieverlust dient. Mit der Näherung des instantanen Aufpralls lässt sich ε darstellen als

$$\varepsilon = \left| \frac{v_{\text{nachher}}}{v_{\text{vorher}}} \right|, \quad (1)$$

wobei v_{vorher} und v_{nachher} die Geschwindigkeiten des Balls *vor* und *nach* einem Aufprall sind.

Für $\varepsilon = 1$ ist der Aufprall völlig elastisch, für $0 < \varepsilon < 1$ handelt es sich um einen teilweise (in)elastischen Stoß.

3 Impaktrelation

Zur genaueren Beschreibung des Bouncing Ball Problems muss zwischen dem mitbewegten System der Tischplatte \bar{S} und des Laborsystems S unterschieden werden. Weiterhin wird das System nur zu den Zeiten t_k betrachtet, in denen der Ball auf der Platte aufschlägt. In der folgenden Abbildung ist eine Beispielbewegung für Ball und Tisch mit den entsprechenden Bezeichnungen für die Geschwindigkeiten gegeben.

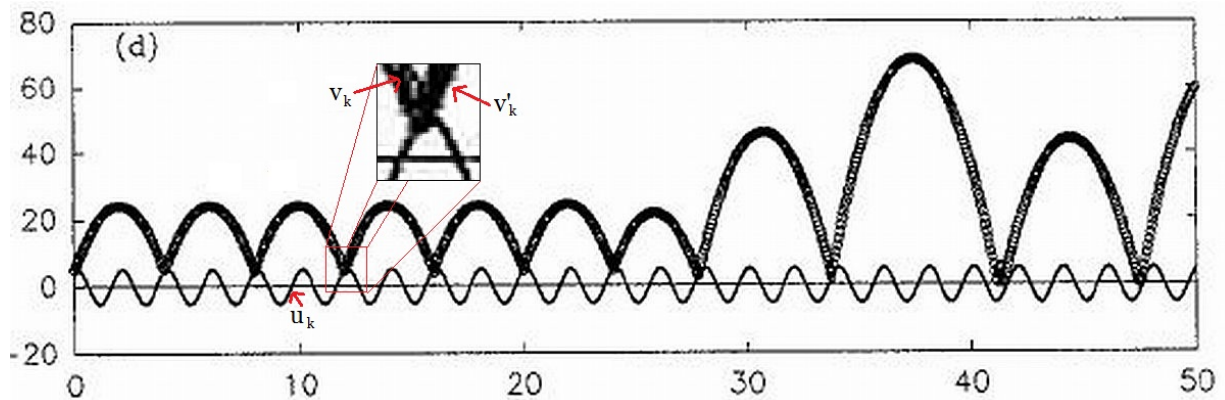


Abbildung 2: Trajektorie von Ball (fette Linie) und Tisch (dünne Linie)

u_k stellt dabei die Tischgeschwindigkeit, \bar{v}_k und \bar{v}'_k die Geschwindigkeit des Balles direkt vor und nach dem Stoß dar.

Über den Restitutionskoeffizienten ergibt sich der Zusammenhang

$$\bar{v}_k = -\varepsilon \bar{v}'_k, \quad (2)$$

der durch Galilei-Transformation in das Laborsystem zu

$$v_k - u_k = \varepsilon(v'_k - u_k) \quad (3)$$

überführt werden kann. Umstellen nach v_k liefert schließlich

$$v_k = [1 + \varepsilon]u_k - \varepsilon v'_k. \quad (4)$$

Die Geschwindigkeit nach dem k -ten Aufprall wird also um das $(1 + \varepsilon)$ -fache der Tischgeschwindigkeit vergrößert. Dieser Ausdruck wird auch als Impaktrelation bezeichnet und spielt bei der weiteren Behandlung des Bouncing Ball Problems immer wieder eine tragende Rolle.

4 Herleitung der Grundgleichungen

Um das Verhalten des Bouncing Balls zu beschreiben, wird eine Bewegungsgleichung benötigt. Um diese zu finden, werden zunächst die Bewegung von Ball und Tisch separat betrachtet.

Der Ball kann klassisch nach Newton beschrieben werden und seine Bewegung genügt der Formel

$$x(t) = x_k + v_k(t_{k+1} - t_k) - \frac{1}{2}g(t_{k+1} - t_k)^2, \quad (5)$$

wobei g die Erdbeschleunigung und t_k sowie t_{k+1} die Zeiten nach dem k -ten und $(k+1)$ -ten Aufprall darstellen.

Die Bewegung des Tisches verläuft sinusoidal und kann über

$$y(t) = A[\sin(\omega t_{k+1} + \theta_0) + 1] \quad (6)$$

beschrieben werden. Dabei bezeichnet A die Amplitude der Schwingung, ω die Frequenz der Oszillation und θ_0 eine beliebige Ruheauslenkung. Der Endterm „+1“ wurde angefügt, um sicherzustellen, dass die Position des Tisches keine negativen Werte annimmt.

Es werden nur die Zeitpunkte eines Aufpralls betrachtet, das heißt die Position von Tisch und Ball ist identisch und es gilt

$$\begin{aligned} x(t_k) &= y(t_k) \\ x_k + v_k(t_{k+1} - t_k) - \frac{1}{2}g(t_{k+1} - t_k)^2 &= A[\sin(\omega t_{k+1} + \theta_0) + 1]. \end{aligned} \quad (7)$$

Durch Einführung der dimensionslosen Koordinate $\theta = \omega t + \theta_0$ und unter Ausnutzung von $x_k = A[\sin(\theta_k) + 1]$ vereinfacht sich Gl. (7) zu

$$0 = A[\sin(\theta_k) + 1] + v_k \left[\frac{1}{\omega}(\theta_{k+1} - \theta_k) \right] - \frac{1}{2}g \left[\frac{1}{\omega}(\theta_{k+1} - \theta_k) \right]^2 - A[\sin(\theta_{k+1}) + 1]. \quad (8)$$

Diese Gleichung stellt die **implizite Phasenabbildung** des Bouncing Balls dar und ist eine der beiden Grundgleichungen. Die Implizitat ergibt sich aus dem Zusammenhang, dass die Gleichung nicht nach θ_{k+1} aufgelöst werden kann. Numerische Simulationen werden dadurch erschwert, allgemein stellt die Implizitat jedoch kein großes Problem dar.

Neben der Phasenabbildung muss ebenfalls eine Abbildung für die Geschwindigkeit gefunden werden, da sie neben der Ruheauslenkung θ_0 die zweite Anfangsbedingung gibt. Dafür wird die Impaktrelation (4) verwendet, wobei für v'_k und u_k jeweils die erste zeitliche Ableitung der Ortsfunktionen (5) und (6) eingesetzt wird. So ergibt sich für v_{k+1} der Zusammenhang

$$v_{k+1} = (1 + \varepsilon)\omega A \cos(\omega t_{k+1} + \theta_0) - \varepsilon[v_k - g(t_{k+1} - t_k)]. \quad (9)$$

Erneutes Einsetzen der dimensionslosen Phase θ liefert schließlich

$$v_{k+1} = (1 + \varepsilon)\omega A \cos(\theta_{k+1}) - \varepsilon[v_k - g(\theta_{k+1}) - \theta_k]. \quad (10)$$

Die nun gewonnene Gleichung stellt die **explizite Geschwindigkeitsabbildung** dar.

(8) und (10) bilden zusammen das Grundgleichungssystem zur Beschreibung des Verhaltens des Bouncing Balls, welches numerisch für verschiedenste Anfangsbedingungen (θ_0, v_0) gelöst werden kann. Zwei Beispiellösungen sind in den folgenden Abbildungen dargestellt.

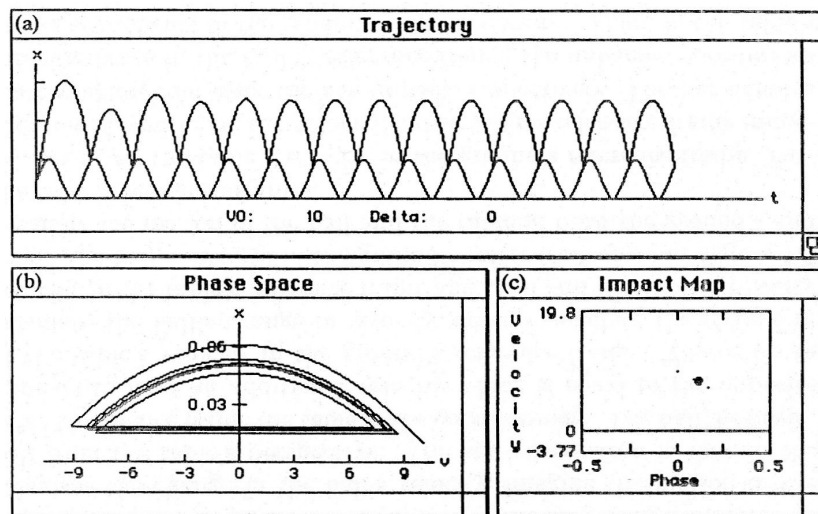


Abbildung 3: einfach-periodische Beispiellösung mit Einschwingvorgang

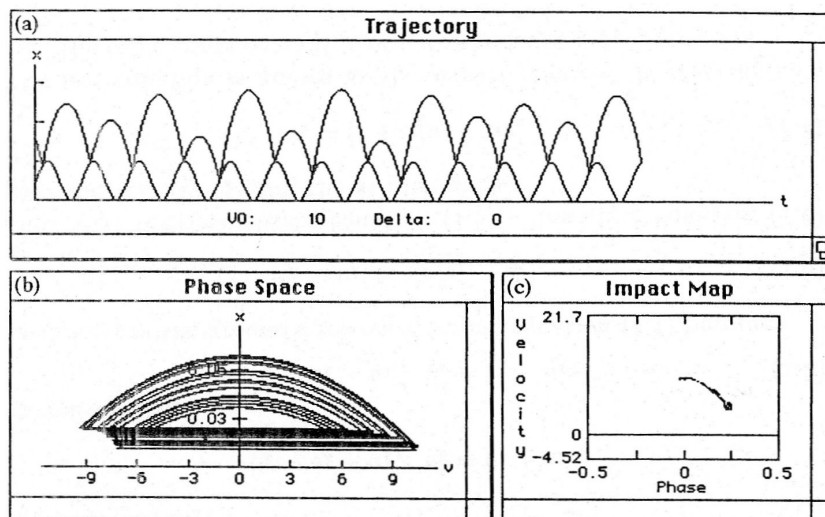


Abbildung 4: chaotisches Verhalten des Systems

5 High Bounce Approximation

Die numerische Lösung der exakten Gleichungen für den Bouncing Ball erweist sich stellenweise als schwierig und ist für bestimmte Problemstellungen zu aufwendig, sodass nach einer sinnvollen Näherung des exakten Modells gesucht wird. In der Tat existiert ein solches Modell, in dem zu den anfangs genannten Näherungen eine weitere hinzugenommen wird, die sogenannte *High Bounce Approximation* (HBA). Hier wird die Annahme gemacht, dass die Amplitude der Tischoszillation sehr klein im Vergleich zur maximal erreichten Höhe des Balls ist, es gilt also

$$v'_{k+1} = -v_k. \quad (11)$$

Ausgehend von dieser Näherung soll erneut das Gleichungssystem gefunden werden, welches das Verhalten des Bouncing Balls beschreibt.

Die Geschwindigkeit des Balles zur Zeit t nach dem k -ten Aufprall ist gegeben durch

$$v(t) = v_k - g(t - t_k), \quad (12)$$

oder zum Zeitpunkt zwischen k -ten und $(k + 1)$ -tem Aufprall als

$$v'_{k+1} = v_k - g(t_{k+1} - t_k). \quad (13)$$

Einsetzen der High Bounce Approximation und umstellen nach t_{k+1} liefert für diesen Ausdruck

$$\boxed{t_{k+1} = t_k + \frac{2}{g}v_k} \quad (14)$$

Diese Gleichung stellt die (explizite) Zeit-Abbildung (time map im Englischen) und damit die erste Gleichung zur Beschreibung der HBA dar.

Die noch fehlende Gleichung für die Geschwindigkeitsabbildung kann wieder über die Impaktrelation gewonnen werden:

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= (1 + \varepsilon)u_{k+1} - \varepsilon v'_{k+1} \\ &\stackrel{\text{HBA}}{=} (1 + \varepsilon)u_{k+1} + \varepsilon v_k. \end{aligned} \quad (15)$$

Einsetzen der Geschwindigkeit des Tisches nach dem $(k + 1)$ -ten Aufschlag

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \omega A \cos(\omega t_{k+1} + \theta_0) \\ &= \omega A \cos[\omega(t_k + 2v_k/g) + \theta_0] \end{aligned} \quad (16)$$

liefert schließlich die Geschwindigkeitsabbildung der HBA in der Form

$$\boxed{v_{k+1} = \varepsilon v_k + \omega(1 + \varepsilon)A \cos[\omega(t_k + 2v_k/g) + \theta_0]} \quad (17)$$

Über die Einführung von dimensionslosen Koordinaten

$$\begin{aligned} \theta &= \omega t + \theta_0 \\ \nu &= 2\omega \frac{v}{g} \\ \Gamma &= 2\omega^2(1 + \varepsilon) \frac{A}{g} \end{aligned}$$

vereinfacht sich das Gleichungssystem aus (14) und (17) zu

$$f = f_{\varepsilon, \Gamma} \begin{cases} \theta_{k+1} = \theta_k + \nu_k \\ \nu_{k+1} = \varepsilon \nu_k + \Gamma \cos(\theta_k + \nu_k) \end{cases} \quad (18)$$

Das nun gewonnene Gleichungssystem beschreibt die Dynamik des Bouncing Balls in der Näherung der High Bounce Approximation. Dabei hängt f maßgeblich von ε und Γ ab, was durch die beiden Indizes an f signalisiert wird.

Ein großer Vorteil dieser Näherung stellt das komplett explizite Gleichungssystem dar, was numerische Simulationen vereinfacht. Weiterhin stimmt die HBA in vielen Punkten mit dem exakten Modell überein, sodass sie ein sinnvoller Ansatz für erste analytische Berechnungen ist. Die Hba besitzt aber auch Nachteile. So kann sich der Ball unter bestimmten Bedingungen (Tisch bewegt sich langsam nach unten, Ball ist wenig ausgelenkt) unterhalb der Tischplatte aufhalten, was physikalisch nicht sinnvoll ist. Ein weitaus größerer Nachteil ist die Tatsache, dass die sogenannte Sticking Solution¹ im Rahmen der HBA nicht auftritt.

6 Lösungen des Bouncing Ball Problems

6.1 Trapping Region

Um Aussagen über mögliche Lösungstypen des Bouncing Ball Problems machen zu können, sollte das Problem selbst genauer untersucht werden. So ist es vorab notwendig, die Anfangsbedingungen (θ_0, v_0) sowie die Parameter ε , A und T zu kennen, da unterschiedliche Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Lösungen führen können. Aus diesem Grund ist es auch nicht sinnvoll, nur eine einzelne Trajektorie zu untersuchen. Als Folge dessen muss das System als Ganzes betrachtet werden, das globale Verhalten ist also von Interesse.

Um das Problem zu reduzieren, wird ein Gebiet definierter Größe innerhalb des globalen Bereichs gesucht, in das alle Lösungstypen hineinlaufen und, einmal innerhalb des Gebietes, dieses nicht wieder verlassen. Dieser Bereich wird als *Trapping Region* bezeichnet.

Ein Merkmal einer Trapping Region ist die eben genannte Begrenztheit. Es muss also zwei Geschwindigkeitsschranken v_{\max} und v_{\min} geben, die die Trapping Region aufspannen.

Um die obere Schranke v_{\max} zu finden, wird die Impaktrelation in der Form

$$v_{k+1} - \varepsilon v_k = (1 + \varepsilon)\omega A \cos(\omega t_{k+1} + \theta_0) + \varepsilon g(t_{k+1} - t_k) \quad (19)$$

betrachtet. Über die durchschnittliche Geschwindigkeit zwischen zwei Aufprällen

$$\tilde{v}_k = v_k - \frac{1}{2}g(t_{k+1} - t_k) \quad \Leftrightarrow \quad t_{k+1} - t_k = \frac{2}{g}(v_k - \tilde{v}_k) \quad (20)$$

ändert sich der Ausdruck zu

$$v_{k+1} + \varepsilon v_k = (1 + \varepsilon)A\omega \cos(\omega t_{k+1} + \theta_0) - 2\varepsilon\tilde{v}_k + 2\varepsilon v_k. \quad (21)$$

¹Mehr dazu im Kapitel *Lösungen des Bouncing Ball Problems*.

Da die durchschnittliche Geschwindigkeit von Tisch und Ball zwischen zwei Aufprällen gleich ist (Beweis über 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung möglich), kann (21) zu

$$v_{k+1} - \varepsilon v_k \leq (1 + 3\varepsilon)A\omega \quad (22)$$

vereinfacht werden.

Mit der Definition $v_{\max} = \frac{1+3\varepsilon}{1-\varepsilon} A\omega$ und der Forderung $v_k > v_{\max}$ folgt

$$v_{k+1} - \varepsilon v_k < (1 - \varepsilon)v_k \quad (23)$$

und damit

$$v_{k+1} < v_k. \quad (24)$$

Dies zeigt, dass für $\varepsilon < 1$ $v_{\max} = \frac{1+3\varepsilon}{1-\varepsilon} A\omega$ obere Schranke der Trapping Region ist. Für den Fall $\varepsilon = 1$ könnte der Ball unendliche Höhen und Geschwindigkeiten erreichen, was physikalisch nicht sinnvoll ist.

Die untere Schranke der Trapping Region ist durch die niedrigste Tischgeschwindigkeit gegeben:

$$v_{k+1} > -A\omega = v_{\min} \quad (25)$$

Mit den gefundenen Schranken kann die Trapping Region *Daufgespannt* werden

$$D = \{(\theta, v) \mid v_{\min} < v < v_{\max}\}. \quad (26)$$

Anmerkung: Ohne Beweis sei hier vorausgesetzt, dass keine Lösung asymptotisch gegen eine der Schranken spiralt und dass jede Lösung innerhalb der Trapping Region diese auch nicht mehr verlassen kann.

Im Folgenden sollen die verschiedenen Lösungstypen des Bouncing Ball Problems beschrieben werden. Dabei wird zu Beginn ein starrer Tisch ($A = 0$), dann ein immer stärker oszillierender Tisch betrachtet ($A > 0$).

6.2 Gleichgewichtslösungen

Für den Fall $A = 0$ entspricht die High Bounce Approximation der exakten Lösung. Aus der Geschwindigkeitsabbildung folgt direkt

$$v_{k+1} = \varepsilon v_k \quad (27)$$

und aus der Zeitabbildung

$$\varepsilon = \frac{t_{k+2} - t_{k+1}}{t_{k+1} - t_k}. \quad (28)$$

Es ist nun interessant, die Zeit Γ zu berechnen, bis der Ball still auf dem Tisch liegen bleibt. Dazu wird über alle Zeiten $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ zwischen zwei Aufprällen summiert:

$$\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \dots \quad (29)$$

Da $\tau_{k+1} = \varepsilon\tau_k$ kann Γ für $\varepsilon < 1$ in die geometrische Reihe

$$\Gamma = \tau_0 + \tau_1 + \dots = \tau_0 + \varepsilon\tau_0 + \varepsilon^2\tau_0 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_0\varepsilon^n = \frac{\tau_0}{1 - \varepsilon} \quad (30)$$

verwandelt und gelöst werden.

Der Ball bleibt also nach einer endlichen Zeit, aber unendlich vielen Stößen starr auf dem Tisch liegen. Dies wird auch als inelastischer Kollaps bezeichnet.

Für kleine Amplituden stellt sich das gleiche Verhalten ein: der Ball schwingt im Einklang mit der schwach oszillierenden Aufprallebene mit.

6.3 Sticking Solutions

Der Ball schwingt solange mit der Tischplatte im Einklang, bis die Aufwärtsbeschleunigung des Tisches größer als die Erdbeschleunigung wird, es muss also gelten

$$\ddot{s} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \theta_0) = a_{\text{Tisch}} < g. \quad (31)$$

Für die Phase θ_u , bei der der Ball vom Tisch abhebt, gilt

$$-g = -A\omega^2 \sin(\theta_u) \Leftrightarrow \theta_u = \arcsin\left(\frac{g}{A\omega^2}\right). \quad (32)$$

Trotz Beschleunigungen größer als g kann der Ball am Tisch haften bleiben, jedoch nur bis zum Erreichen der Phase θ_u , bei der er vom Tisch abhebt. Dieser Prozess wiederholt sich, es entstehen also periodische Orbits, genannt *sticking solutions*. Die sticking solutions zählen zu den nicht invertierbaren Lösungen, da viele unterschiedliche Anfangsbedingungen zu gleichen Orbits führen. Hinzu kommt, dass es unendlich viele verschiedene sticking Lösungen gibt.

In den folgenden Abbildungen sind vier mögliche sticking Lösungen graphisch dargestellt.

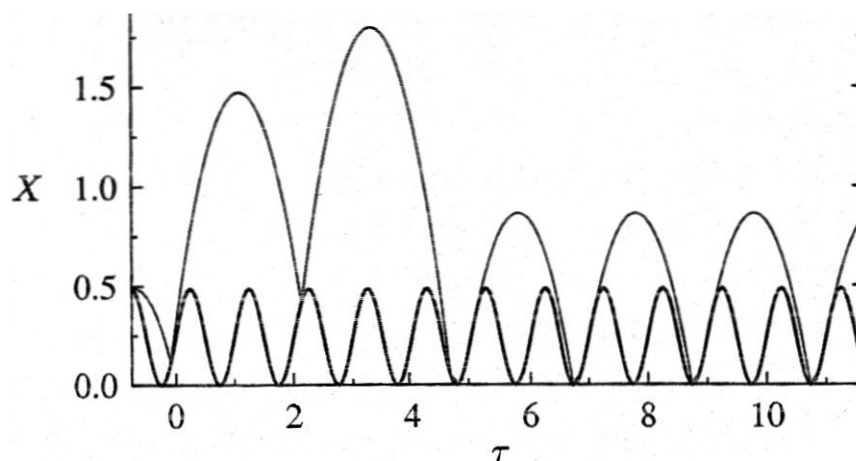


Abbildung 5: Sticking Lösung mit Einschwingvorgang

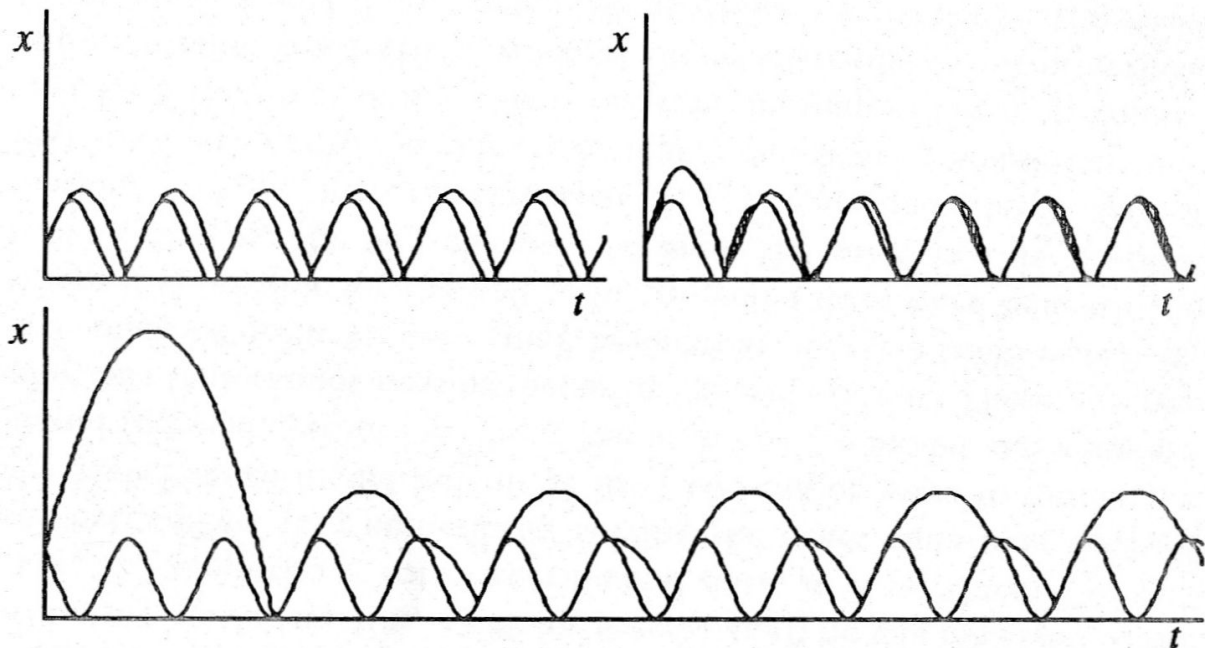


Abbildung 6: Weitere Sticking Lösungen.

6.4 Periodische Lösungen

Wird die Amplitude noch weiter erhöht, treten neben der sticking solution weitere periodische Lösungen auf. Dabei existiert zu Beginn nur die Periode-1 Lösung, bei der Frequenz von Tisch und Ball exakt übereinstimmen. Für höhere Amplituden stellt sich eine Periode-2 Lösung ein, danach eine Periode-4 Lösung. Insgesamt treten nur Orbits der Periode $P = 2^n = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$ auf.

Zwei periodische Lösungen sind in den folgenden Abbildungen dargestellt.

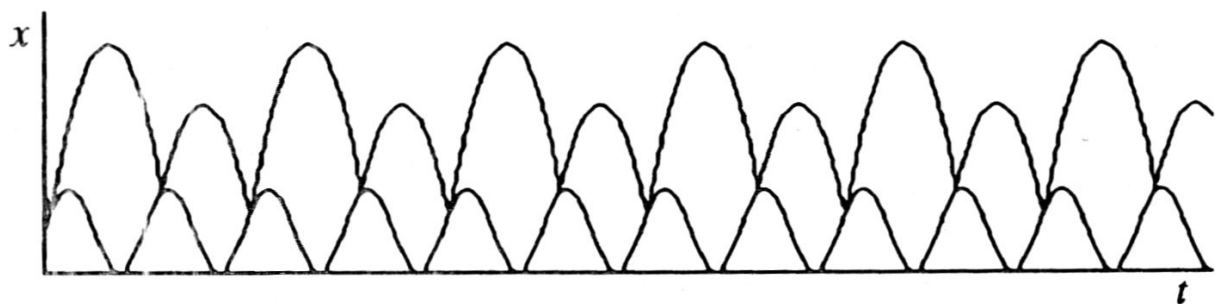


Abbildung 7: Periode-2 Lösung

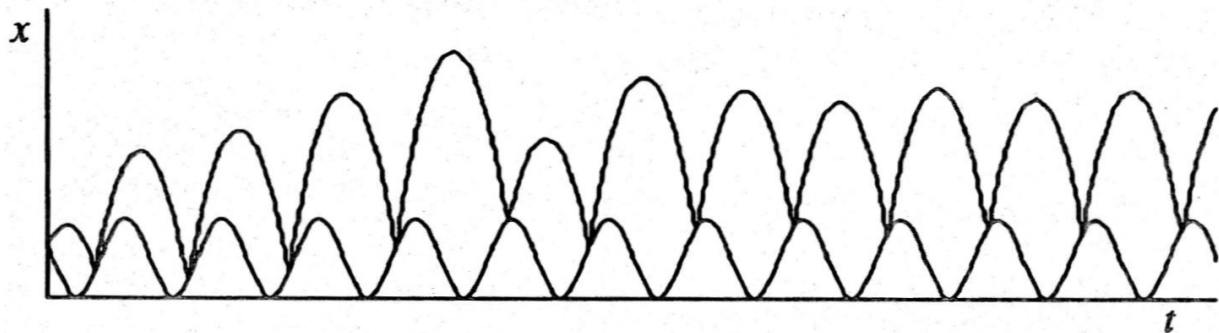


Abbildung 8: Konvergenz zu Periode-1 Lösung

6.5 Chaotische Orbits

Ab einer gewissen Grenzamplitude ist die „unendlichfache“ Periode überschritten und es tritt aperiodisches Verhalten auf. Dieses Ende der Periodenkaskade markiert damit den Beginn eines Bereiches, in dem chaotische Orbits vorliegen. Typisch für das Chaos ist die Sensibilität bzgl. der Anfangsbedingungen, welche anhand der folgenden Tabelle veranschaulicht werden soll.

- Vergleich zweier Anfangsbedingungen:
- Phasen θ_0 unterscheiden sich um 0,00001
- Operationsparameter:
- Amplitude $A = 0,012$ cm
- Frequenz = 60 Hz
- $\varepsilon = 0,5$
- $v_0 = 8.17001$ cm/s

Hit	Phase	Phase
0	0.12001	0.12002
1	0.119575	0.119585
2	0.203686	0.203667
3	0.044295	0.044330
4	0.245370	0.245382
5	0.979140	0.979114
6	0.163451	0.163401
7	0.151935	0.152045
8	0.133956	0.133762
9	0.170026	0.170343
10	0.106407	0.105836
11	0.210176	0.210911
12	0.034337	0.033041
13	0.240314	0.239475
14	0.989893	0.991636
15	0.183346	0.186362
16	0.108543	0.102037
17	0.202784	0.211096
18	0.048083	0.033369
19	0.245904	0.239552
20	0.977588	0.991442
21	0.160466	0.186034
22	0.158498	0.102743
23	0.122340	0.210230
24	0.188441	0.034893
25	0.073121	0.240520

Wie zu erkennen ist, weichen die anfangs fast gleichen Phasen schon nach 23 Aufprällen

in allen Nachkommastellen voneinander ab, es ist also eine völlig andere Trajektorie bzw. Lösung entstanden. Ein Beispiel für solch ein chaotisches Orbit zeigt die folgende Abbildung.

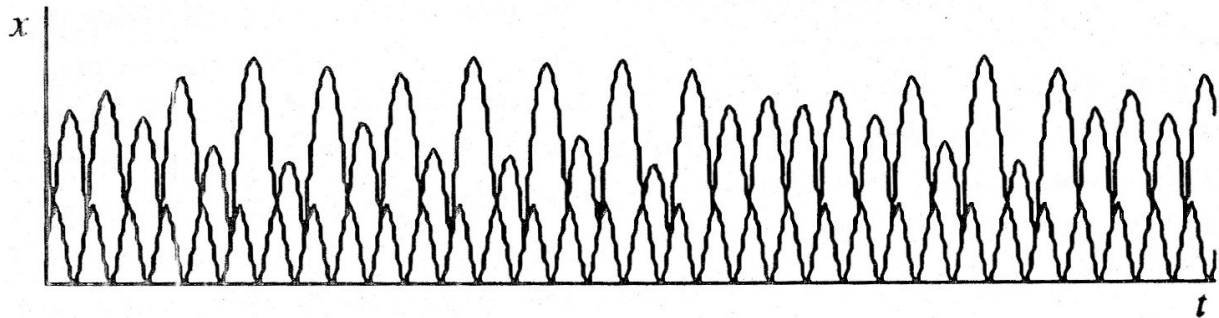


Abbildung 9: Chaotisches Orbit

Eine mögliche Beschreibung der chaotischen Orbits kann über Attraktoren und Bifurkationsdiagramme erfolgen. Dies soll an dieser Stelle jedoch nicht weiter ausgeführt werden.

7 Zusammenfassung

Die Lösungen des Bouncing Ball Problems lassen sich in vier Kategorien einteilen.

1. Gleichgewichtslösungen
2. *sticking solutions*
3. Periodische Lösungen
4. Chaos

Diese Lösungen können nebeneinander koexistieren und sind vollständig durch die Anfangsbedingungen (θ_0, v_0) bestimmt.

Literatur

- [1] Tuffilaro et al., „Chaotic Dynamics of a bouncing ball“, 1986
- [2] S. Strogatz, „Nonlinear dynamics and chaos“, Perseus Books Publishing, 1994
- [3] Linz, Vogel, „Regular and chaotic dynamics in bouncing ball models“, 2010