

Seminar

zur Theorie der Atome, Moleküle und
kondensierten Materie

Reguläre und chaotische Dynamik von
Punktwirbelsystemen

Semir Vrana

18. Januar 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlegendes	1
2.1	Bewegungsgleichung	1
2.2	Hamilton'sche Dynamik	1
3	Zwei Punktwirbel	2
3.1	Dynamik zweier Punktwirbel	2
3.2	Randwertprobleme	3
4	Drei Punktwirbel	5
4.1	Bewegungsgleichung für die Abstände	5
4.2	Integrabilität	6
4.3	Selbstähnlicher Kollaps	7
5	Vier Punktwirbel	8
5.1	Chaos im reduzierten Vier-Wirbel-Problem	8
5.1.1	Allgemeines zu Chaos in Hamilton'schen Systemen	9
5.1.2	Poincare-Schnitte des reduzierten Vier-Wirbel-Problems	9
6	Periodisch angeordnete Punktwirbel/ Die Kármán'sche Wirbelstraße	11
6.1	Bewegungsgleichung für Periodisch angeordnete Punktwirbel	11
6.2	Kármán'sche Wirbelstraße	12

1 Einleitung

Mit der Eulergleichung lässt sich die Strömung eines idealen Fluids beschreiben. In zwei Dimensionen lässt sich die Wirbel der Strömung durch sogenannte Punktwirbel beschreiben. Dabei wird durch den Ansatz von N punktförmigen Wirbeln das Problem von einer partiellen Differentialgleichung zu einem System von $2N$ gekoppelten, gewöhnlichen Differentialgleichungen vereinfacht. Im Folgenden soll nun die Dynamik dieser Punktwirbel im Fall von 2,3 und 4 Punktwirbeln betrachtet werden. Als eine weitere Anwendung wird die Kármán'sche Wirbelstraße betrachtet.

2 Grundlegendes

2.1 Bewegungsgleichung

Jeder Punktwirbel erzeugt ein Geschwindigkeitsfeld (vgl. [Newton2]) mit den Komponenten in Polarkoordinaten

$$u_r = 0, \quad (2.1)$$

$$u_\phi = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (2.2)$$

Dabei ist Γ die Zirkulation des Wirbels, die ein Maß für die Stärke des Wirbelfeldes ist. Ein Punktwirbel bleibt von seinem eigenen Feld unbeeinflusst. Die Dynamik eines Punktwirbels ergibt sich dann aus Überlagerung der Wirbelfelder aller anderen Punktwirbel:

$$\dot{\vec{x}}_i = \sum_{j=1}^N \prime \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^2}. \quad (2.3)$$

Das \prime an der Summe deutet an, dass der Summand mit $j = i$ ausgelassen wird. Für den Vektor gilt $\vec{x} = (x, y, 0)$, damit das Vektorprodukt definiert ist.

Alternativ lässt sich die Lage eines Punktwirbels als komplexe Zahl $z_k(t) = x_k(t) + iy_k(t)$ auffassen. Dann vereinfacht sich (2.3) zu

$$\frac{dz_k^*}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^N \prime \frac{\Gamma_j}{z_k - z_j}. \quad (2.4)$$

Mit dieser Gleichung lassen sich z.B. die Kármán'schen Wirbelstraßen später einfacher beschreiben.

2.2 Hamilton'sche Dynamik

Für die Dynamik lässt sich eine Hamilton-Funktion definieren:

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1}^N \prime \Gamma_i \Gamma_j \ln |\vec{x}_i - \vec{x}_j|, \quad (2.5)$$

mit den kanonischen Gleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{\Gamma_i} \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{1}{\Gamma_i} \frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (2.6)$$

Für Hamilton'sche Systeme gilt das Noether-Theorem, d.h. aus Symmetrien folgen Erhaltungsgrößen ([Aref2]). Die Hamilton-Funtion hängt nicht explizit von der Zeit ab:

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1}^N \Gamma_i \Gamma_j \ln |\vec{x}_i - \vec{x}_j| = \text{const.} \quad (2.7)$$

Dann ist das System noch invariant unter Translationen entlang der Achsen,

$$Q = \sum_{i=1}^N \Gamma_i x_i = \text{const.}, \quad P = \sum_{i=1}^N \Gamma_i y_i = \text{const.}, \quad (2.8)$$

und unter Translationen,

$$L = \sum_{i=1}^N \Gamma_i (x_i^2 + y_i^2) = \text{const.} \quad (2.9)$$

3 Zwei Punktwirbel

3.1 Dynamik zweier Punktwirbel

Betrachtet wird nun die Dynamik von zwei Punktwirbeln. Der Einfachheit halber sollen die Zirkulativitäten gleich groß, $\Gamma_1 = \Gamma_2$ und entgegengesetzt gleich groß, $\Gamma_1 = -\Gamma_2$.

$\Gamma_1 = \Gamma_2$:

Es sei $\Gamma := \Gamma_1 = \Gamma_2$. Dann lauten die Bewegungsgleichungen der beiden Punktwirbel:

$$\dot{\vec{x}}_1 = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2}, \quad (3.1)$$

$$\dot{\vec{x}}_2 = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2} = -\dot{\vec{x}}_1. \quad (3.2)$$

Die Bewegung der beiden Wirbel verläuft also zu allen Zeiten antiparallel. Es ist nun vorteilhaft den Schwerpunkt $\vec{R} = 1/2(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$ und die Relativkoordinate $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ der beiden Wirbel zu betrachten:

$$\dot{\vec{R}} = \frac{1}{2}(\dot{\vec{x}}_1 + \dot{\vec{x}}_2) = \frac{1}{2}(\dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_1) = \vec{0}, \quad (3.3)$$

$$\Rightarrow \vec{R} = \text{const.} \quad (3.4)$$

Der Schwerpunkt ruht also. Für die Relativkoordinate erhält man

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_2 = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2} = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{\vec{e}_z \times \vec{r}}{r^2} = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{\vec{e}_z \times \vec{e}_r}{r} = \frac{\Gamma}{\pi r} \vec{e}_\phi. \quad (3.5)$$

Diese verbleibende Differentialgleichung löst man am einfachsten in Polarkoordinaten. Dann gilt

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi = \frac{\Gamma}{\pi r} \vec{e}_\phi. \quad (3.6)$$

Jetzt kann man die Lösung leicht ablesen

$$r(t) = r_0 = \text{const.}, \quad (3.7)$$

$$\phi(t) = \frac{\Gamma}{\pi r^2} t + \phi_0. \quad (3.8)$$

Die Punktwirbel bewegen sich also auf Kreisbahnen um ihren Schwerpunkt.

$\Gamma_1 = -\Gamma_2$:

. Hier sei wieder $\Gamma = \Gamma_1 = -\Gamma_2$. Die Differenzialgleichung lautet nun

$$\dot{\vec{x}}_1 = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2}, \quad (3.9)$$

$$\dot{\vec{x}}_2 = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2} = \dot{\vec{x}}_1. \quad (3.10)$$

Die Bewegungen verlaufen nun also parallel. Es ist wieder nützlich die Relativ- und Schwerpunktskoordinaten zu betrachten:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_2 = \vec{0}. \quad (3.11)$$

Diesmal ist der gesamte Relativvektor erhalten, die Position der Wirbel zueinander kann sich also nicht ändern. Für den Schwerpunkt gilt jetzt

$$\dot{\vec{R}} = \frac{1}{2}(\dot{\vec{x}}_1 + \dot{\vec{x}}_2) = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{\vec{e}_z \times \vec{r}}{r^2} = \frac{\Gamma}{\pi r} \vec{e}_\phi = v_0 \vec{e}_\phi = \text{const}. \quad (3.12)$$

Die Schwerpunkt bewegt sich also mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht zum Relativvektor der Punktwirbel.

3.2 Randwertprobleme

Es soll nun die Dynamik eines Punktwirbels in einem berandeten Gebiet untersucht werden.



Abbildung 1: Links: Problemstellung, ein Punktwirbel vor einem geraden Rand. Rechts: Die Bewegung des Punktwirbels im Feld des Bildwirbels

Als erstes soll ein Punktwirbel vor einem geraden Rand, wie in Abbildung 1 zu sehen, betrachtet werden.

Ein Punktwirbel erzeugt in einem Fluid ein Geschwindigkeitsfeld. Betrachtet wird nun der Fall, dass sich rechts des Randes kein Fluid mehr befindet. Dann kann dort auch kein Geschwindigkeitsfeld mehr sein. Man erhält also die Randwertbedingung, dass das Geschwindigkeitsfeld am Rand verschwinden muss.

Um nun die Randbedingung zu erfüllen, kann man analog zur Bildladungsmethode in der Elektrostatik vorgehen, vgl. [Nolting], und Bildwirbel so platzieren, dass die Randbedingung erfüllt ist.

Bei diesem einfachen Beispiel erreicht man das, indem man einen Wirbel mit entgegengesetzter Zirkularität im gleichen Abstand zum Rand auf der gegenüberliegenden Seite platziert, siehe Abbildung 1. Die Lösung dieses Problems ist aber aus dem vorherigen Abschnitt bekannt, so dass man hier nichts rechnen muss. Der Punktwirbel bewegt sich also parallel zum Rand.

Nun soll sich ein Punktwirbel in einem Runden Gebiet mit Radius R befinden, siehe Abbildung 2. Die Randbedingung ist wieder, dass das Geschwindigkeitsfeld am Rand verschwinden soll.

Es wird wieder ein Bildwirbel platziert. Das Geschwindigkeitsfeld lautet dann in Polarkoordinaten

$$u_r(\vec{r}) = 0, \quad (3.13)$$

$$u_\phi(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Gamma_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{\Gamma_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right). \quad (3.14)$$

Dabei sind r_1, Γ_1 Ort und Zirkulation des betrachteten Wirbels und r_2, Γ_2 die entsprechenden Größen des Bildwirbels. Der Radialanteil des Geschwindigkeitsfeldes verschwindet bereits. Nun müssen r_2 und Γ_2 so gewählt werden, dass auch der Winkelanteil verschwindet. Um eine geeignete Wahl zu finden wird $u_\phi(\vec{r})$ zunächst noch umgeformt. Aus Symmetriegründen wird muss $e_{r_1} = e_{r_2}$ gelten. Mit $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_{r_1} = \cos \alpha$ erhält man dann

$$u_\phi(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Gamma_1/r}{\left| \vec{e}_r - \frac{r_1}{r} \vec{e}_{r_1} \right|} + \frac{\Gamma_2/r_2}{\left| \frac{r}{r_2} \vec{e}_r - \vec{e}_{r_2} \right|} \right) \quad (3.15)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_1}{R} \left(1 + \frac{r_1^2}{R^2} - 2 \frac{r_1}{R} \cos \alpha \right)^{-1/2} + \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_2}{r_2} \left(\frac{R^2}{r_2^2} + 1 - 2 \frac{R}{r_2} \cos \alpha \right)^{-1/2} \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.16)$$



Abbildung 2: Links: Ein Punktwirbel in einem kreisförmigen Gebiet. Rechts: Die Bewegung des Punktwirbels im Feld des Bildwirbels

Man liest dann für die den Bildwirbel ab, dass

$$\frac{\Gamma_1}{R} = -\frac{\Gamma_2}{r_2}, \quad \frac{r_1}{R} = \frac{R}{r_2}, \quad (3.17)$$

gelten muss, also ist

$$r_2 = \frac{R^2}{r_1}, \quad \Gamma_2 = -\frac{R}{r_1}\Gamma_1. \quad (3.18)$$

Daraus folgt dann dass der betrachtete Punktwirbel sich auf einer Kreisbahn bewegt, siehe Abbildung 2. Die Winkelgeschwindigkeit ergibt sich zu

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{r} \frac{\Gamma_1}{R^2 - r^2}. \quad (3.19)$$

4 Drei Punktwirbel

4.1 Bewegungsgleichung für die Abstände

Bei der Bewegung von drei und mehr Punktwirbeln ist es oft hilfreich, die Abstände $R_{ij} = |\vec{x}_i - \vec{x}_j|$ der Punktwirbel anstelle der absoluten Positionen \vec{x}_i zu betrachten, [Newton2]. Für diese erhält man als Bewegungsgleichung

$$\dot{\vec{R}}_{ij} = \dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{x}}_j = \sum_{k=1}^N \prime \Gamma_k \frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_i - \vec{x}_k)}{2\pi |\vec{x}_i - \vec{x}_k|^2} - \sum_{k=1}^N \prime \Gamma_k \frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_j - \vec{x}_k)}{2\pi |\vec{x}_j - \vec{x}_k|^2}, \quad (4.1)$$

$$= \sum_{k=1}^N \prime \Gamma_k \frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_i - \vec{x}_k)}{2\pi |\vec{x}_i - \vec{x}_k|^2} + \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^2} \quad (4.2)$$

$$- \sum_{k=1}^N \prime \Gamma_k \frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_j - \vec{x}_k)}{2\pi |\vec{x}_j - \vec{x}_k|^2} - \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^2}, \quad (4.3)$$

$$= \sum_{k=1}^N \prime \Gamma_k \left[\frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_i - \vec{x}_k)}{|\vec{x}_i - \vec{x}_k|^2} - \frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_j - \vec{x}_k)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|^2} \right] + \frac{\Gamma_i + \Gamma_j}{2\pi} \frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^2}. \quad (4.4)$$

Das \prime an der Summe deutet an, dass die Fälle $k = i$ und $k = j$ ausgeschlossen werden. Nun nutzt man aus, dass $d/dt R_{ij}^2 = 2(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \cdot (\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{x}}_j)$ ist und setzt hier den obigen Ausdruck ein, dann erhält man

$$\frac{d}{dt} R_{ij}^2 = 2(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \cdot \sum_{k=1}^N \prime \Gamma_k \left[\frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_i - \vec{x}_k)}{R_{ik}^2} - \frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_j - \vec{x}_k)}{R_{jk}^2} \right] \quad (4.5)$$

$$+ \frac{\Gamma_i + \Gamma_j}{2\pi} \underbrace{2(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \cdot \frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{R_{ij}^2}}_{=0}, \quad (4.6)$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \prime \Gamma_k \vec{e}_z \cdot [\vec{x}_i \times \vec{x}_k + \vec{x}_j \times \vec{x}_i + \vec{x}_k \times \vec{x}_j] \left(\frac{1}{R_{ik}^2} - \frac{1}{R_{jk}^2} \right). \quad (4.7)$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass man beim Spatprodukt zyklisch vertauschen darf. Der Ausdruck $A_{ijk} := 1/2 [\vec{x}_i \times \vec{x}_k + \vec{x}_j \times \vec{x}_i + \vec{x}_k \times \vec{x}_j] \cdot \vec{e}_z$ ist die Fläche des von $\vec{x}_i, \vec{x}_j, \vec{x}_k$ aufgespannten Dreiecks. Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} R_{ij}^2 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \prime \Gamma_k A_{ijk} \left(\frac{1}{R_{ik}^2} - \frac{1}{R_{jk}^2} \right). \quad (4.8)$$

Erhaltungsgrößen

Für die Bewegung der Abstände existieren zwei Erhaltungsgrößen. Zum einen die Energieerhaltung:

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1}^N \Gamma_i \Gamma_j \ln R_{ij} = \text{const}, \quad (4.9)$$

und zum anderen kann man zeigen, dass

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \Gamma_i \Gamma_j R_{ij}^2 = \left(\sum_{i=1}^N \Gamma_i \right) \sum_{i=1}^N \Gamma_i (x_i^2 + y_i^2) - \left(\sum_{i=1}^N \Gamma_i x_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^N \Gamma_i y_i \right)^2 \quad (4.10)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^N \Gamma_i \right) L - Q^2 - P^2 = \text{const} \quad (4.11)$$

eine Erhaltungsgröße ist.

Fixpunkte und Stabilität

Für drei Punktwirbel ist $A_{123} = -A_{231} = A_{312} =: A$ und die Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{d}{dt} R_{12}^2 = \frac{1}{\pi} \Gamma_3 A \left(\frac{1}{R_{23}^2} - \frac{1}{R_{31}^2} \right), \quad (4.12)$$

$$\frac{d}{dt} R_{23}^2 = \frac{1}{\pi} \Gamma_1 A \left(\frac{1}{R_{31}^2} - \frac{1}{R_{12}^2} \right), \quad (4.13)$$

$$\frac{d}{dt} R_{31}^2 = \frac{1}{\pi} \Gamma_2 A \left(\frac{1}{R_{12}^2} - \frac{1}{R_{23}^2} \right). \quad (4.14)$$

Die Abstände zwischen den Wirbeln sind dann zum Einen erhalten, wenn alle drei Abstände gleich sind. Die Wirbel bilden dann ein gleichschenkliges Dreieck. Und zum Anderen, wenn die Wirbel auf einer geraden liegen, da dann die Fläche A verschwindet. Es ist erstaunlich, dass die Fixpunkte nicht von den Zirkularitäten abhängen. In diesen Konfigurationen führen die Wirbel starre Rotationsbewegungen aus.

Die kolineare Anordnung ist immer instabil und die als gleichschenkliges Dreieck ist dann instabil, falls $\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_3 + \Gamma_3 \Gamma_1 < 0$. Sonst ist diese Anordnung neutral stabil, kleine Auslenkungen aus den Ruhelagen bleiben klein, verschwinden aber nicht.

Eine ausführliche Betrachtung der Fixpunkte und deren Stabilität findet man z.B. in [Aref4].

4.2 Integrabilität

Für das 3-Wirbel-Problem existieren die drei Bewegungsgleichungen (4.12) bis (4.14) und zwei Erhaltungsgrößen

$$H = -\frac{1}{2\pi} (\Gamma_1 \Gamma_2 \ln R_{12} - \Gamma_1 \Gamma_3 \ln R_{13} + \Gamma_2 \Gamma_3 \ln R_{23}), \quad (4.15)$$

$$J = \Gamma_1 \Gamma_2 R_{12}^2 + \Gamma_1 \Gamma_3 R_{13}^2 + \Gamma_2 \Gamma_3 R_{23}^2. \quad (4.16)$$

Aus diesen Erhaltungsgrößen kann im Prinzip $R_{13} = R_{13}(R_{12}, H, J)$ und $R_{23} = R_{23}(R_{12}, H, J)$ bestimmen. Setzt man dies nun in (4.12) ein, so erhält man

$$\frac{d}{dt} R_{12}^2 = \frac{1}{\pi} \Gamma_k A \left(\frac{1}{R_{23}^2(R_{12}, H, J)} - \frac{1}{R_{31}^2(R_{12}, H, J)} \right), \quad (4.17)$$

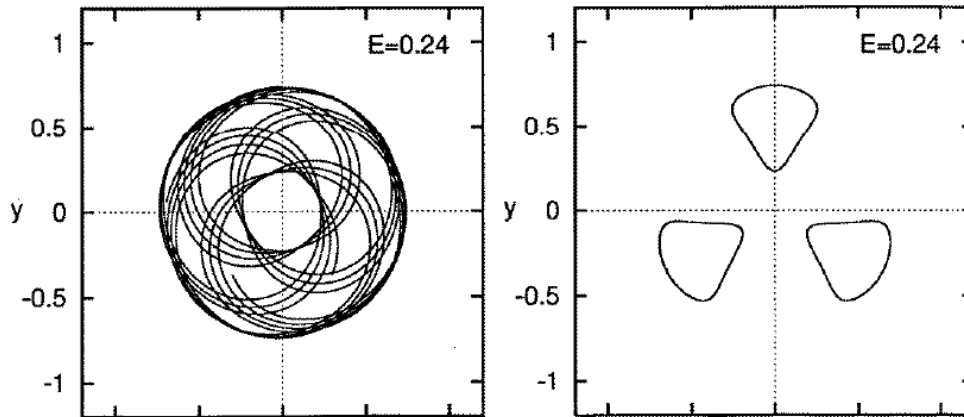


Abbildung 3: Bewegung von drei Punktwirbeln die aus der stabilen Ruhelage als gleichschenkliges Dreieck ausgelenkt wurden. Links im Ruhesystem, rechts im Mitrotierendem. Entnommen aus [Neufeld]

eine separierbare Differentialgleichung. Das Problem ist also integrabel, es sind keine chaotischen Dynamiken möglich.

4.3 Selbstähnlicher Kollaps

Im Folgenden sollen als ein analytisch lösbares Beispiel Lösungen der Dynamik betrachtet werden (vgl. [Aref5]), bei dem die Form der Konfiguration beibehalten wird, also dass das Verhältnis zweier Abstände für alle Abstände erhalten bleibt. Es ist praktisch die Variablen nach $R_{12} = s_3$ usw. umzubenennen.

Für diese Lösungen wird der Ansatz $s(t) = s(0)f(t)$ gemacht, mit einer noch zu bestimmenden Funktion $f(t)$, für die $f(0) = 1$ gelten muss. Dieser Ansatz wird in (4.12) eingesetzt und man erhält

$$\frac{d}{dt}s_1^2 = \frac{d(f^2)}{dt}s_1^2(0) = 2\frac{\Gamma_1}{\pi}A(0)\left(\frac{1}{s_2^2(0)} - \frac{1}{s_3^2(0)}\right) = \text{const} =: -\frac{s_1^2(0)}{\tau}, \quad (4.18)$$

$$\Rightarrow f(t) = \sqrt{1 - \frac{t}{\tau}}. \quad (4.19)$$

Für $\tau > 0$ nennt man τ die Kollapszeit und die Punktwirbel führen einen selbstähnlichen Kollaps durch. Man sieht bereits, dass für $t > \tau$ die Funktion $f(t)$ komplex wird. Das heißt, die Lösung der Differentialgleichung ist nur für eine endliche Zeit τ definiert. Dies ist eine besondere Eigenschaft von nichtlinearen Differentialgleichungen, dass die Lösungen existieren können, die nicht für alle Zeiten definiert sind.

Beim realen Problem, z.B. von Wirbeln im Wasser, wird man, wenn die Wirbel nah beieinander sind, ihre räumliche Ausdehnung nicht mehr vernachlässigen können, da die Voraussetzungen für die Beschreibung der Wirbel als Punkt nicht mehr gegeben sind.

Bisher wurde die Differentialgleichung nur formal gelöst. Jetzt muss noch untersucht werden, wann eine solche Lösung zustande kommen kann.

Oben wurde $f(t)$ dadurch bestimmt, dass der Ansatz in (4.12) eingesetzt wurde. Echte selbstähnliche Bewegungen kann man nur erhalten, wenn beim Einsetzen in (4.13) und (4.14) der gleiche Wert für

τ rauskommt, also

$$2\frac{\Gamma_1}{\pi}A(0)\left(\frac{1}{s_2^2(0)} - \frac{1}{s_3^2(0)}\right) = 2\frac{\Gamma_2}{\pi}A(0)\left(\frac{1}{s_3^2(0)} - \frac{1}{s_1^2(0)}\right) = 2\frac{\Gamma_3}{\pi}A(0)\left(\frac{1}{s_1^2(0)} - \frac{1}{s_2^2(0)}\right), \quad (4.20)$$

$$\Rightarrow \Gamma_1(s_3^2(0) - s_2^2(0)) = \Gamma_2(s_1^2(0) - s_3^2(0)) = \Gamma_3(s_2^2(0) - s_1^2(0)) \quad (4.21)$$

gilt. Weiter darf die Energie- und Drehimpulserhaltung nicht verletzt werden. Aus der Energieerhaltung folgt, wenn die Lösung dort einsetzt

$$H(t) = H(0) - \frac{\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_2\Gamma_3}{2\pi} \ln f(t), \quad (4.22)$$

$$\Rightarrow \Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_2\Gamma_3 = 0. \quad (4.23)$$

Und beim Drehimpuls erhält man

$$L(t) = L(0)f^2(t), \quad (4.24)$$

$$\Rightarrow L(0) = 0. \quad (4.25)$$

Die Bedingungen kann man nun nutzen, um explizite Anfangsbedingungen zu konstruieren, für die ein selbstständlicher Kollaps durchgeführt wird. Zunächst sei (4.23) erfüllt, dann kann man aus der Forderung (4.25) die gesuchten Anfangsbedingungen erhalten. Dazu wähle man das Koordinatensystem so, dass

$$\vec{x}_1 = \left(-\frac{\Gamma_2 d}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, 0\right), \quad (4.26)$$

$$\vec{x}_2 = \left(\frac{\Gamma_1 d}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, 0\right) \quad (4.27)$$

gilt. Nun wertet man (4.25) aus, um \vec{x}_3 zu erhalten,

$$\Gamma_1\Gamma_2 d^2 + \Gamma_2\Gamma_3 [(x_2 - x_3)^2 + y_3^2] + \Gamma_1\Gamma_3 [(x_1 - x_3)^2 + y_3^2] = 0, \quad (4.28)$$

$$\Rightarrow x_3^2 + y_3^2 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2} d^2. \quad (4.29)$$

Das ist ein Kreis um den Koordinatenursprung mit dem Radius $\sqrt{\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2}} d$, siehe Abbildung 4.

5 Vier Punktwirbel

5.1 Chaos im reduzierten Vier-Wirbel-Problem

Wir betrachten folgendes Szenario: Zunächst platziert man drei Punktwirbel $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ an den Eckpunkten eines gleichschenkligen Dreiecks. Die Punktwirbel führen eine starre Rotationsbewegung aus. Nun geht man ins mitrotierende Bezugssystem, die Punktwirbel ruhen nun. Man fügt nun einen vierten Punktwirbel mit $\Gamma_4 \rightarrow 0$ zum System hinzu. Dieser Probewirbel bewegt sich nun auf Bahnen mit konstanter Energie und stört die Bewegung der anderen Wirbel nicht. Die Bahnen sind schlimmstenfalls quasiperiodisch.

Es wird nun der Fall betrachtet, dass die Punktwirbel $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ aus ihren Ruhelagen ausgelenkt werden und nun um ihre Ruhelagen rotieren. Die Hamiltonfunktion hat nun die Form¹

$$H = H_0 + \epsilon H_1(t). \quad (5.1)$$

¹Zur genauen Form der Hamiltonfunktion siehe z.B. [Newton1] s. 99

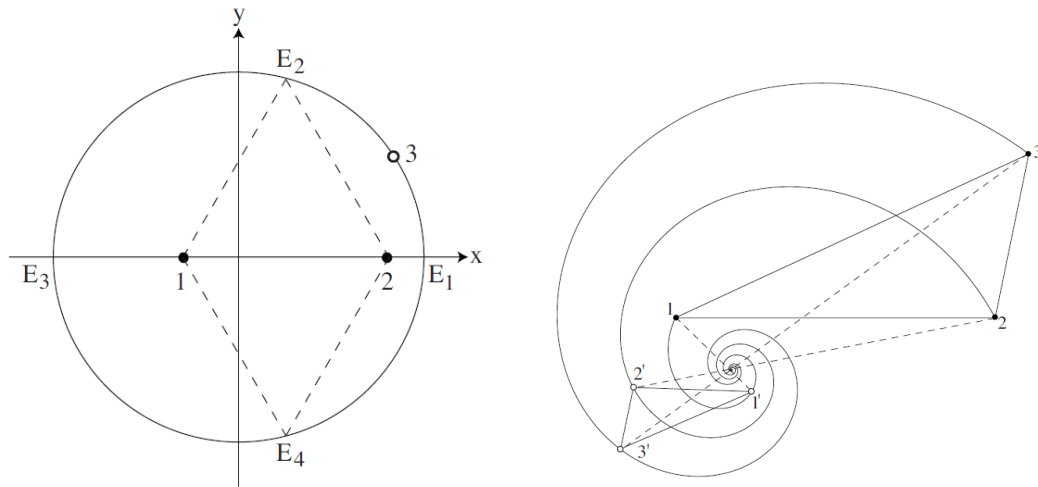


Abbildung 4: Links: Anfangsbedingungen, die zu selbstähnlichen Bewegungen führen. Rechts: Der selbstähnliche Kollaps von 3 Punktwirbeln. Entnommen aus [Aref5]

5.1.1 Allgemeines zu Chaos in Hamilton'schen Systemen

Für Hamilton'sche Systeme existieren zwei wichtige Theoreme, aus denen grundlegende Eigenschaften folgen²:

- Satz von Liouville: Ein Hamilton'sches System mit N Freiheitsgraden ($2N$ -Dimensionaler Phasenraum) bewegt sich quasiperiodisch auf N -dimensionalen invarianten Tori und ist integrabel, falls N Erhaltungsgrößen I_i in Involution existieren, also mit $\{I_i, I_j\} = 0 \forall i, j = 1, \dots, N$
- Kolmogorov-Arnold-Moser-Theorem (Kurz KAM-Theorem): Bei hinreichend kleiner Störung ϵH_1 eines integrablen Hamilton'schen Systems H_0 bleiben fast alle invarianten Tori erhalten und im Allgemeinen werden sie leicht deformiert. Im Fall $\epsilon \rightarrow 0$ füllen die Tori einen immer größer werdenden Anteil des Phasenraums aus.
Das Theorem macht keine Aussage für die Tori, für deren Frequenzen ω_i ganze Zahlen n_i existieren mit $\sum_i \omega_i n_i = 0$

Der Satz von Liouville sagt einem, wann ein Hamilton'sches System integrabel ist. Im Fall von drei Punktwirbel folgt dies aus den Erhaltungsgrößen $H, L, P^2 + Q^2$, die in Involution stehen. Aus dem KAM-Theorem folgt nun, dass ein integrables System durch eine hinreichend große zeitabhängige Störung chaotisch werden kann. In Abbildung 5 sieht man anhand von Poincaré-Schnitten³ wie die Tori bei steigender Störung aufgebrochen werden.

5.1.2 Poincaré-Schnitte des reduzierten Vier-Wirbel-Problems

Im Folgenden werden Poincaré-Schnitte des reduzierten Vier-Wirbel-Problems betrachtet. Bei den Poincaré-Schnitten hier wurde ausgenutzt, dass die Rotation der drei Punktwirbel mit nicht verschwindender Zirkularität periodisch ist. Die Poincaré-Schnitte zeigen daher die Position des Probewirbels nach Durchlauf von jeweils einer Periode.

²Siehe auch [Stoop]

³Auf einem Poincaré-Schnitt werden alle Schnittpunkte der Trajektorien mit einer Hyperfläche abgebildet

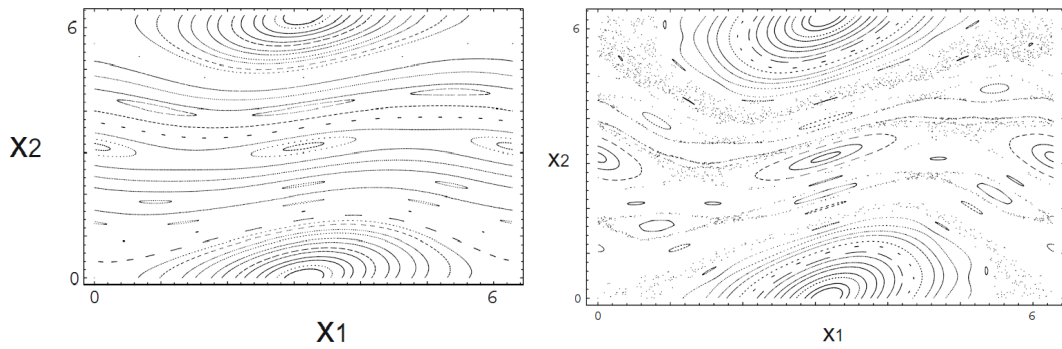


Abbildung 5: Links: Poincaré-Schnitte eines Hamilton'schen Systems mit kleiner Störung. Rechts: Das gleiche System mit größerer Störung. Entnommen aus [Stoop]

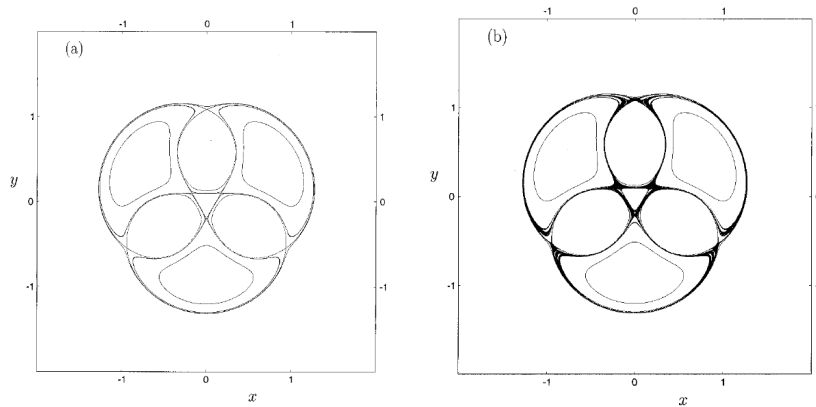


Abbildung 6: Poincaré-Schnitte mit $H = 0$ links und $H = 1.528 \cdot 10^{-7}$ rechts. Aus [Kuznetsov]

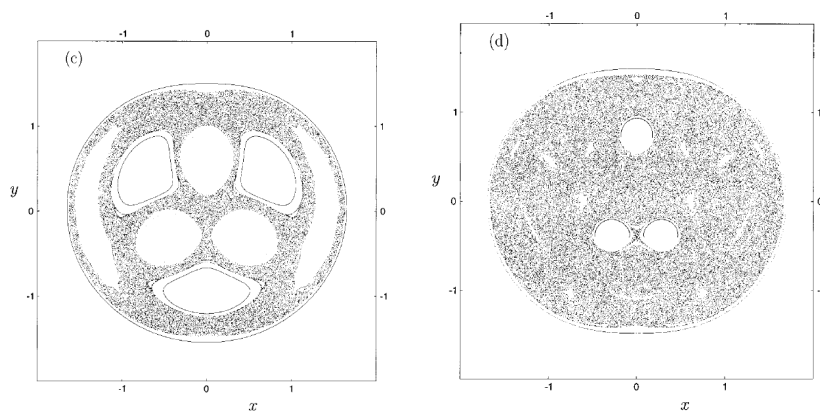
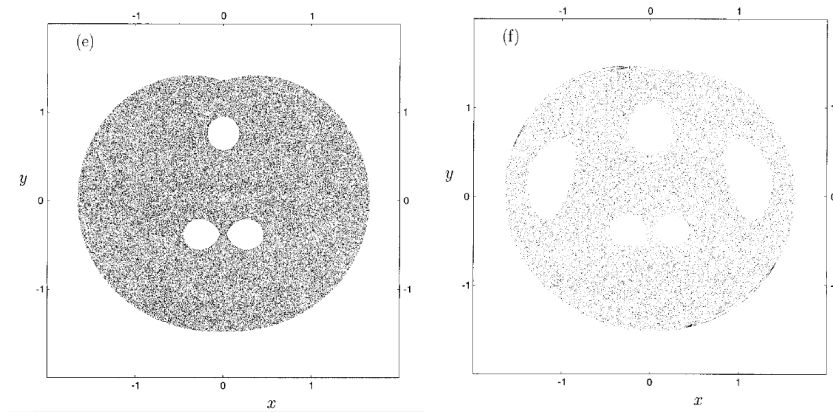
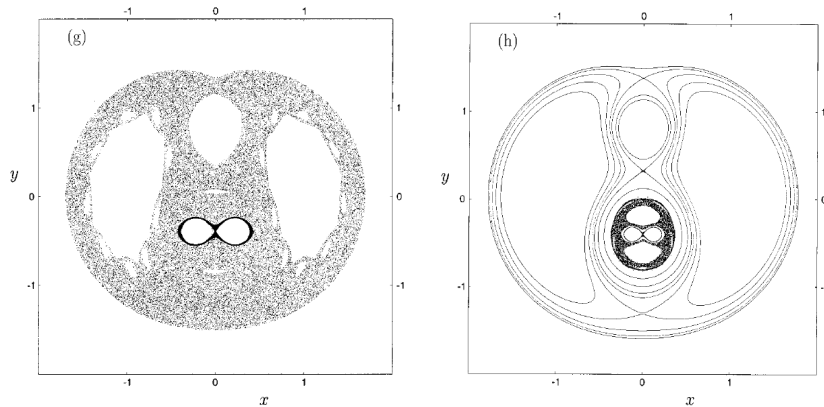


Abbildung 7: Poincaré-Schnitte mit $H = 0.001494$ links und $H = 0.045322$ rechts. Aus [Kuznetsov]

Abbildung 8: Poincaré-Schnitte mit $H = 0.055158$ links und $H = 0.055159$ rechts. Aus [Kuznetsov]Abbildung 9: Poincaré-Schnitte mit $H = 0.079918$ links und $H = 0.165686$ rechts. Aus [Kuznetsov]

Man sieht in Abbildung 6 die reguläre Bahn für verschwindende Störung und wie die Bahn durch eine kleine Störung zunächst nur etwas dicker erscheint. Das bedeutet, dass die Bahnkurve bereits nicht mehr geschlossen wird. Bei wachsender Störung wird kann sich der Probewirbel in einem immer größeren Bereich aufhalten kann. Es existiert hier sogar ein Wert mit maximalen Chaos, bei dem der Ort des Probewirbels keine Muster erzeugt, siehe Abbildungen 7 und 8. Bei weiter wachsender Störung entstehen wieder reguläre Bahnen und die chaotische Bahnen verschwinden bis nur ein kleiner chaotischer Bereich bleibt, siehe Abbildung 9.

In Abbildung 10 die Bahn eines Probewirbels im Ruhesystem und im mitrotiertem System zu sehen.

6 Periodisch angeordnete Punktwirbel/ Die Kármán'sche Wirbelstraße

6.1 Bewegungsgleichung für Periodisch angeordnete Punktwirbel

Es soll der Fall betrachtet werden, dass ein Punktwirbelsystem von N Wirbeln periodisch fortgesetzt wird. Dazu lässt sich die Bewegungsgleichung wie folgt modifizieren: Man geht von Gleichung (2.4)

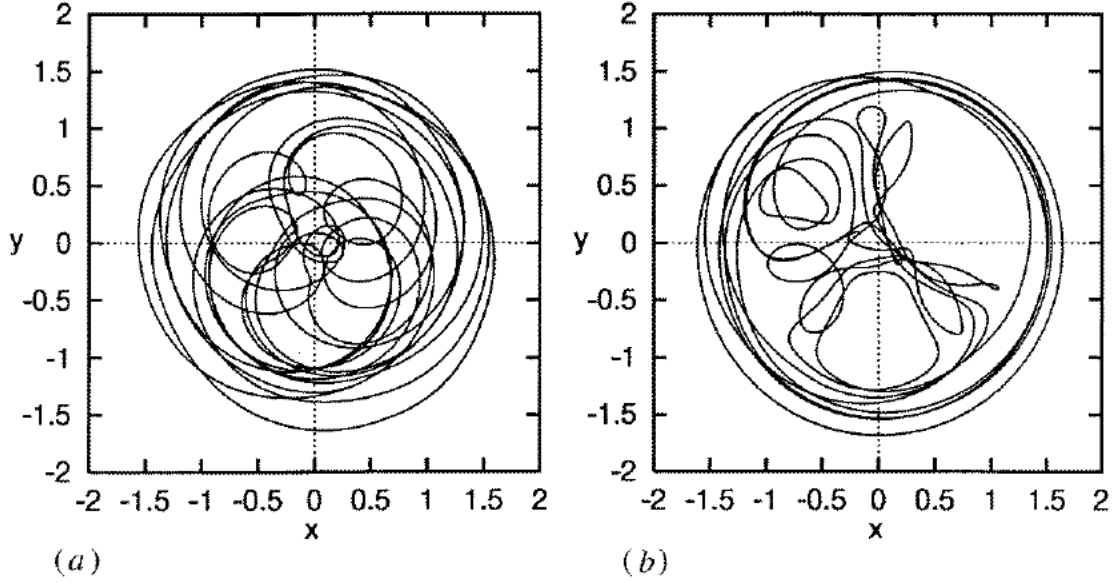


Abbildung 10: Die Bahn eines Probewirbels im Ruhesystem und im mitrotierten System. entnommen aus [Neufeld]

aus und platziert weitere Punktwirbel auf $z_j \pm nL, n = 1, 2, 3, \dots$. Dies führt zur Gleichung

$$\frac{dz_k^*}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^N \left[\frac{\Gamma_j}{z_k - z_j} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_j}{z_k - (z_j + nL)} + \frac{\Gamma_j}{z_k - (z_j - nL)} \right) \right]. \quad (6.1)$$

Die Punktwirbel auf $z_k \pm nL, n = 1, 2, 3, \dots$, spielen keine Rolle, da sich ihre Beiträge weg heben. Die obige Gleichung lässt sich nun umformen:

$$\frac{dz_k^*}{dt} = \frac{1}{2\pi i} 2 \sum_{j=1}^N \Gamma_j \left[\frac{1}{z_k - z_j} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_k - z_j}{(z_k - z_j)^2 - (nL)^2} \right]. \quad (6.2)$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist nun aber

$$\frac{1}{z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - (nL)^2} = \frac{\pi}{L} \left[\frac{L}{\pi z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi z/L}{(\pi z/L)^2 - (n\pi)^2} \right] = \frac{\pi}{L} \cot \left(\frac{\pi z}{L} \right) \quad (6.3)$$

die Partialbruchentwicklung des Cotangens. Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{dz_k^*}{dt} = \frac{1}{Li} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \cot \left(\frac{\pi}{L} (z_k - z_j) \right). \quad (6.4)$$

6.2 Kármán'sche Wirbelstraße

Die Gleichung (6.4) soll nun für den Fall $N = 2$ und $\Gamma_1 = -\Gamma_2 =: \Gamma$ gelöst werden. Dies entspricht der Kármán'schen Wirbelstraße, die entsteht, wenn sich zylindrische Hindernisse in einer Strömung

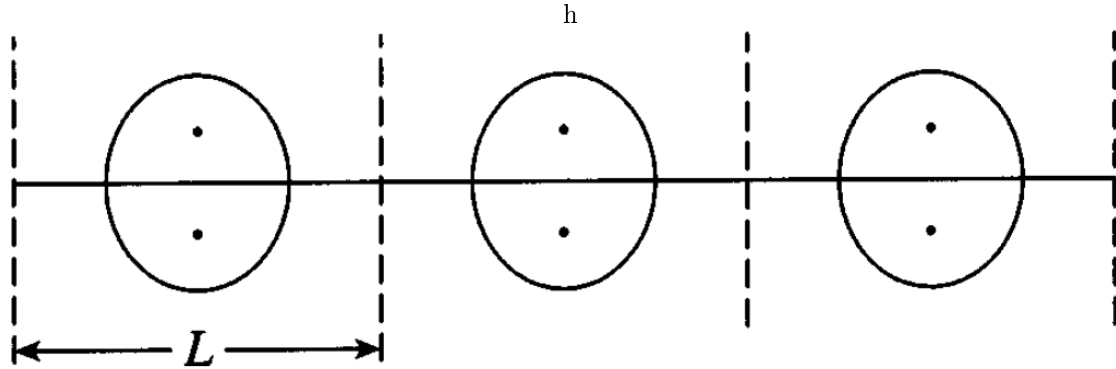


Abbildung 11: Ein periodisch fortgesetztes Punktwirbelsystem. Entnommen aus [Stremler1]

befinden. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{dz_1^*}{dt} = -\frac{1}{Li}\Gamma \cot\left(\frac{\pi}{L}(z_1 - z_2)\right), \quad (6.5)$$

$$\frac{dz_2^*}{dt} = \frac{1}{Li}\Gamma \cot\left(\frac{\pi}{L}(z_2 - z_1)\right) = -\frac{1}{Li}\Gamma \cot\left(\frac{\pi}{L}(z_1 - z_2)\right) = \frac{dz_1^*}{dt}. \quad (6.6)$$

Die Lösung verläuft analog zum einfachen Fall von 2 Punktwirbeln aus Abschnitt 3.1. Man betrachtet Relativ- und Schwerpunktkoordinate:

Für die Relativkoordinate gilt

$$\frac{dr^*}{dt} = \dot{z}_1 - \dot{z}_2 = 0, \quad (6.7)$$

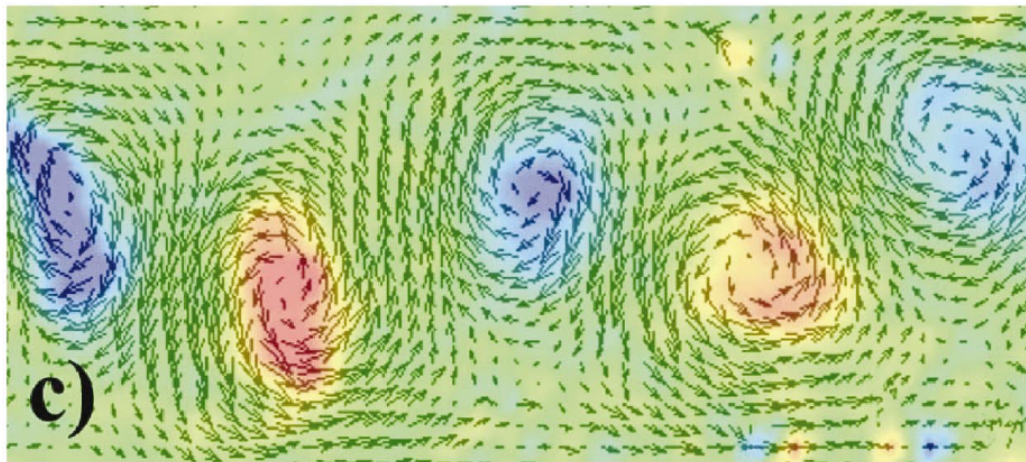
$$\rightarrow r = \text{const.} \quad (6.8)$$

Der Bastand ist also erhalten. Für den Schwerpunkt erhält man

$$\frac{dR^*}{dt} = \frac{1}{2}(\dot{z}_1 + \dot{z}_2) = -\frac{1}{Li}\Gamma \cot\left(\frac{\pi}{L}r\right) = \text{const}, \quad (6.9)$$

eine konstante Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit hier ist aber eine beliebige komplexe Zahl. Damit diese Lösung nun Kármán'sche Wirbelstraßen muss die Bewegung entlang der x -Achse erfolgen. Dazu muss der Cotanges reinimaginär werden. Damit dies erfüllt ist, muss $\text{Re}(z_1 - z_2) = 0$ oder $\text{Re}(z_1 - z_2) = \frac{L}{2}$ gelten.

Eine Stabilitätsanalyse zeigt nun, dass die Konfiguration im ersten Fall immer instabil ist. Im zweiten Fall ist sie nur stabil, falls $\text{Im}(z_1 - z_2) = \frac{L}{\pi} \text{arsinh}(1) \approx 0.28L$ erfüllt ist. Damit ist die Form der Wirbelstraße bis auf den Faktor L vollständig bestimmt. Dieser Faktor lässt sich mit dieser Punktwirbelbetrachtung nicht bestimmen. Er hängt von der Form des Hindernisses und der Strömung ab.



H

Abbildung 12: Das Wirbelfeld einer Kármán'schen Wirbelstraße. Entnommen aus [Roushan]

Literatur

- [Agyris] J. Argyris, G. Faust, M. Haase, R. Friedrich, „Die Erforschung des Chaos“. Springer 2010
- [Aref1] H. Aref, „150 Years of Vortex Dynamics“. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* Volume 24, Numbers 1-4, 1-7, DOI: 10.1007/s00162-009-0178-6
- [Aref2] H. Aref, „Integrable, Chaotic, and Turbulent Vortex Motion in Two-Dimensional Flows“. *Annual Review of Fluid Mechanics* Vol. 15: 345-389 (Volume publication date January 1983) DOI: 10.1146/annurev.fl.15.010183.002021
- [Aref3] H. Aref, „Motion of three vortices“. *Phys. Fluids* 22, 393 (1979); doi: 10.1063/1.862605
- [Aref4] H. Aref, „Stability of relative equilibria of three vortices“. *Phys. Fluids* 21, 094101 (2009); doi:10.1063/1.3216063
- [Aref5] H. Aref „Self-similar motion of three point vortices“. *Phys. Fluids* 22, 057104 (2010); doi: 10.1063/1.3425649
- [Aref6] H. Aref, „Point vortex dynamics: A classical mathematics playground“. *J. Math. Phys.* 48, 065401 (2007); doi: 10.1063/1.2425103
- [Kuznetsov] L. Kuznetsov and G. Zaslavsky, „Regular and chaotic advection in the flow field of a three-vortex system“. 10.1103/PhysRevE.58.7330
- [Newton1] P. Newton, „The N-Vortex Problem“. Springer, 2001
- [Newton2] P. Newton and G. Chamoun, „Vortex Lattice Theory: A Particle Interaction Perspective“. *SIAM Rev.* 51, pp. 501-542
- [Neufeld] Z. Neufeld and T. Tel, „The vortex dynamics analogue of the restricted three-body problem: advection in the field of three identical point vortices“. 1997 *J. Phys. A: Math. Gen.* 30 2263
- [Nolting] W. Nolting „Grundkurs Theoretische Physik 3“ Springer-Verlag, 2011

- [Roushan] P. Roushan and X. Wu , „Universal wake structures of Kármán vortex streets in two-dimensional flows “. *Phys. Fluids* 17, 073601 (2005); doi:10.1063/1.1943469
- [Stremler1] M. Stremler, „Relative equilibria of singly periodic point vortex arrays“. *Phys. Fluids* 15, 3767 (2003); doi: 10.1063/1.1624608
- [Stremler2] M. Stremler, „On relative equilibria and integrable dynamics of point vortices in periodic domains“. *Theor. Comput. Fluid Dyn.* (2010) 24:2537 DOI 10.1007/s00162-009-0156-z
- [Stoop] R. Stoop, W. Steeb „Berechenbares Chaos in dynamischen Systemen“. Birkhäuser Verlag, 2006