11. Übung zur Physik I (WS 2013/14) **Prof. Kohl/Prof. Rohlfing**

Ausgabedatum: 13./14.01.2014 Abgabedatum: 20./21.01.2014

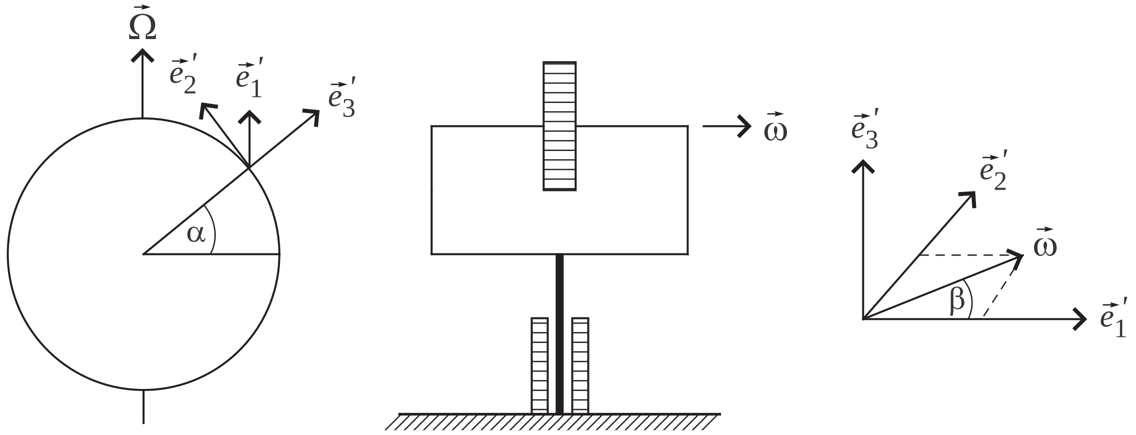
Aufgabe 71: Einfacher Kreiselkompass **(schriftlich, 3 Punkte)**

Eine auf der Erdoberfläche an einem Ort mit der geographischen Breite α befindliche Scheibe rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um eine Achse, die sich in einem Rahmen befindet, der um die vertikale Achse ($\vec{e}\,'_3$) frei drehbar sei. Das Trägheitsmoment der Scheibe bezüglich dieser Drehachse sei J. Die Rotation der Erde $\vec{\Omega}$ führt zu einer Änderung des Drehimpulses der Scheibe und damit zu einem Drehmoment $\vec{M}$. Auf den Rahmen wirkt das Drehmoment $\vec{M}^{\mathrm{Rahmen}} = -\vec{M}$. Die Beschreibung der Bewegung des Rahmens erfolgt zweckmäßigerweise in einem Koordinatensystem $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$, $\vec{e}\,'_3$, das fest mit der Erdoberfläche verbunden ist.

a) Stellen Sie die Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\Omega}$ der Erde und $\vec{\omega}$ der Scheibe im Koordinatensystem $\vec{e}\,'_1$ ($\vec{e}_\varphi$, Osten), $\vec{e}\,'_2$ ($-\vec{e}_\vartheta$, Norden), $\vec{e}\,'_3$ ($\vec{e}_r$, oben) dar.

b) Berechnen Sie die durch die Rotation der Erde hervorgerufene Änderung $\dfrac{d\vec{L}}{dt}$ des Drehimpulses und bestimmen Sie das Drehmoment $\vec{M}^{\mathrm{Rahmen}}$ auf den Rahmen.

c) Die $\vec{e}\,'_3$-Komponente von $\vec{M}^{\mathrm{Rahmen}}$ führt zu einer Drehung des Rahmens. Für welche Winkel β befindet sich der Rahmen im Gleichgewicht? Handelt es sich dabei um stabile Gleichgewichte?



Aufgabe 72: Taylor-Entwicklung **(mündlich, 2 Punkte)**

a) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung (um $x = 0$) der Funktionen $f(x) = \ln(1 + x)$ und $g(x) = \sqrt{1 + x}$ bis zur 2. Ordnung.

b) Ein Massenpunkt m bewege sich im Bereich $x > 0$ in einem eindimensionalen Potenzial

$$V(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \qquad \text{mit} \qquad a, b > 0 \;.$$

Bestimmen Sie die Position x_0, bei der $V(x)$ minimal wird, und entwickeln Sie $V(x)$ in eine Taylor-Reihe bis zur 2. Ordnung um x_0. Mit welcher Kreisfrequenz ω würde der Massenpunkt um x_0 oszillieren, sofern die Auslenkungen klein bleiben?

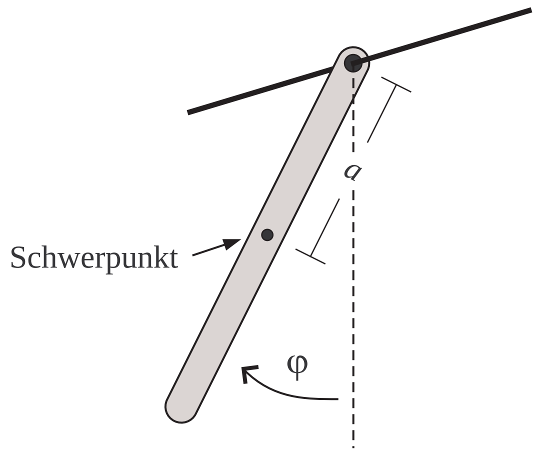
Aufgabe 73: **Stabpendel** **(mündlich, 4 Punkte)**

Ein dünner Stab der Länge L und der Masse m wird im Abstand a vom Schwerpunkt an einer Achse aufgehängt und führt unter dem Einfluss der Schwerkraft Schwingungen aus. Die entsprechende Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen lautet $\ddot{\varphi} = -\frac{a\,m\,g}{J}\,\varphi$. Dabei ist J das Trägheitsmoment des Stabes bezüglich der Drehachse. Das Trägheitsmoment des Stabes bezüglich des Schwerpunktes beträgt $J_s = \frac{m}{12}\,L^2$.

a) Berechnen Sie die Schwingungsfrequenz ω dieses Pendels. Skizzieren Sie ω in Abhängigkeit vom Abstand a.

b) Welcher Wert für ω ergibt sich beim Abstand $a = \frac{L}{2}$? In welchem anderen Abstand $\tilde{a}$ der Drehachse vom Schwerpunkt ergibt sich die gleiche Schwingungsfrequenz? Wie lang müsste ein Fadenpendel mit der gleichen Masse m sein, um ebenfalls diese Schwingungsfrequenz zu haben?

c) Für welchen Abstand a wird die Schwingungsfrequenz ω maximal? Berechnen Sie die zugehörige Dauer einer Schwingungsperiode für einen Stab der Länge $L = 1$ m.

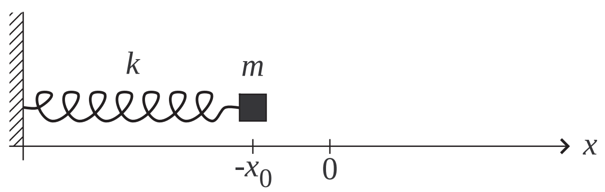


Aufgabe 74: **Harmonischer Oszillator mit Gleitreibung** **(schriftlich, 4 Punkte)**

Eine Masse m bewege sich unter dem Einfluss einer Federkraft $F_{\text{Feder}} = -k\,x$ und der Gleitreibungskraft F_{Gl}. Diese hat die Form

$$F_{\text{Gl}} = \begin{cases} -\mu\,m\,g & \text{für} \quad v > 0 \\ 0 & \text{für} \quad v = 0 \\ \mu\,m\,g & \text{für} \quad v < 0 \end{cases}$$

mit dem konstanten Gleitreibungskoeffizienten μ.



a) Zur Zeit $t = 0$ befindet sich die Masse bei $x(0) = -x_0$ (mit $x_0 > 0$) und habe die Geschwindigkeit $v(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Dabei sei $x_0 > 4\,\frac{\mu\, g}{\omega^2}$. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und berechnen Sie $x(t)$ für $0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}$.

Wie weit ist die Masse zur Zeit $t = \frac{\pi}{\omega}$ ausgelenkt?

b) Berechnen Sie $x(t)$ für $\frac{\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{2\,\pi}{\omega}$.

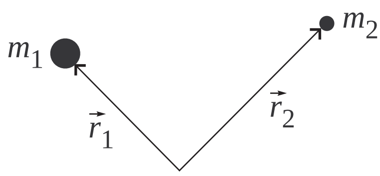
Wie groß ist am Ende dieser Zeitspanne die Auslenkung?

c) Skizzieren Sie $x(t)$ für $0 \leq t \leq \frac{2\,\pi}{\omega}$.

d) Wann endet die Bewegung? Welche Rolle spielt dabei die Haftreibung $F_{\mathrm{H}} = -\mu_{\mathrm{H}}\, m\, g$ mit $\mu_{\mathrm{H}} > \mu$?

Aufgabe 75: Zwei-Körper-Problem (schriftlich, 3 Punkte)

Gegeben sind zwei Massen m_1 und m_2, die sich an den Orten $\vec{r}_1$ bzw. $\vec{r}_2$ befinden.



a) Wie groß ist die durch m_2 hervorgerufene Gravitationskraft, die auf m_1 wirkt? Geben Sie die Bewegungsgleichung für die Masse m_1 an.

b) Wie lautet die entsprechende Bewegungsgleichung für m_2?

c) Die beiden gekoppelten Bewegungsgleichungen aus a) und b) lassen sich durch Einführung einer Relativkoordinate $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ und einer Schwerpunktskoordinate

$$\vec{R} = \frac{m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

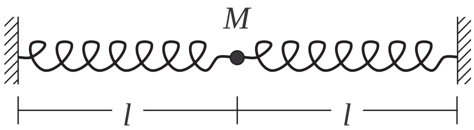
entkoppeln. Berechnen Sie dazu unter Verwendung von a) und b) $\ddot{\vec{r}}$ und $\ddot{\vec{R}}$. Wie lauten die resultierenden Bewegungsgleichungen für die Relativ- und die Schwerpunktsbewegung?

d) Welche Art von Bewegung führt der Schwerpunkt aus? Welche Bahnkurven erwarten Sie für die Relativbewegung?

e) Wenn die Anfangsbedingungen so gewählt werden, dass die Relativbewegung auf einem Kreis vom Radius R_0 erfolgt, welche Form haben dann die Bahnkurven $r_1(t)$ und $r_2(t)$?

Aufgabe 76: Tensorwirkung einer Feder **(mündlich, 4 Punkte)**

Zwei Federn der Längen l_0 und der Federkonstanten D werden am Punkt M aneinandergespannt und um $\Delta\, l$ auf die Längen l gedehnt.



Wie groß ist die Summe der Spannenergien beider Federn, wenn der Verbindungspunkt M beider Federn

a) um eine Strecke x in Längsrichtung

b) um eine Strecke y in Querrichtung

der Feder ausgelenkt wird? Welche Kräfte müssen für diese Auslenkungen jeweils aufgewandt werden?

Durch welchen Tensor

$$\bar{\bar{D}} = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & D_{yy} \end{pmatrix}$$

wird die Verknüpfung der Kraft

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

mit der Auslenkung $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, nämlich $\vec{F} = -\bar{\bar{D}}\,\vec{r}$ beschrieben? In welche Richtung α wird der Punkt M ausgelenkt, wenn eine kleine Kraft $\vec{F}$ unter 45° zur Federrichtung angreift?

Zahlenwerte: $l_0 = 15\,\text{cm}$, $l = 20\,\text{cm}$

Hinweis: Nutzen Sie die Potenzreihenentwicklung

$$\sqrt{l^2 + y^2} = l\sqrt{1 + \frac{y^2}{l^2}} \approx l\,\left(1 + \frac{1}{2}\frac{y^2}{l^2} + ...\right)$$

und vernachlässigen Sie durchgängig Terme mit Potenzen von y größer als 2.