6. Übung zur Physik I (WS 2013/14) — **Prof. Kohl/Prof. Rohlfing**

Ausgabedatum: 18./19.11.2013 — Abgabedatum: 25./26.11.2013

Aufgabe 37: Newton'sche Reibung (schriftlich, 3 Punkte)

Ein Körper mit der Masse m bewege sich entlang der x-Richtung und erfahre dabei eine Reibungskraft $F = -\alpha\,\dot{x}^2$. Dabei ist α eine Konstante.

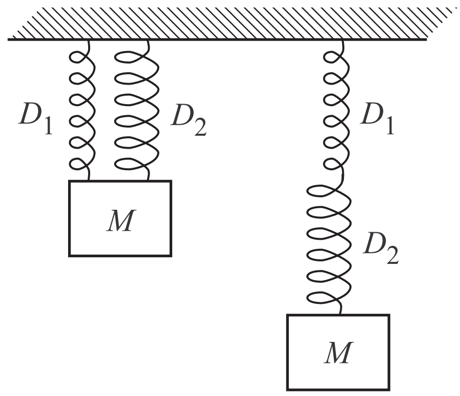
a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit v auf und lösen Sie die Gleichung durch Trennung der Variablen. Bestimmen Sie die auftretende Integrationskonstante derart, dass die Anfangsbedingung $v\,(0) = v_0$ erfüllt wird.

b) Berechnen Sie dann $x\,(t)$ aus $v\,(t)$ mit der Anfangsbedingung $x\,(0) = x_0$.

c) Skizzieren Sie $v\,(t)$ und $x\,(t)$. Was ergibt sich für die Geschwindigkeit und den Ort im Grenzfall $t \to \infty$?

Aufgabe 38: Kombination von Federn (schriftlich, 2 Punkte)

Zwei Federn mit den Federkonstanten D_1 und D_2 werden einzeln durch das Anhängen eines Gewichtsstücks (Masse $M = 3$ kg) um 2 cm bzw. 5 cm verlängert.



a) Berechnen Sie die Schwingungsfrequenz des Gewichtsstücks an Feder 1 bzw. an Feder 2.

b) Wie groß sind die Auslenkung aus der Ruhelage und die Schwingungsfrequenz für die beiden skizzierten Anordnungen?

Aufgabe 39: Gleitreibung (mündlich, 2 Punkte)

Ein Schlitten wird auf einer ebenen Eisfläche mit einer Geschwindigkeit von $3\,\mathrm{m/s}$ angeschoben. Wie weit gleitet der Schlitten unter dem Einfluss der Gleitreibungskraft $F = -\mu\, m\, g\, \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$ ohne weiteren Anschub ($\mu = 0,05$)?

Aufgabe 40: Komplexe Zahlen (mündlich, 2 Punkte)

Auch im Komplexen gilt $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$. Betrachten Sie $e^{i\,(\alpha + \beta)}$ ($\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$) und zeigen Sie damit die Gültigkeit der beiden Additionstheoreme

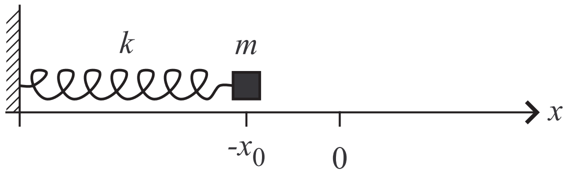
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\,\cos(\beta) + \cos(\alpha)\,\sin(\beta)$$

und

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\,\cos(\beta) - \sin(\alpha)\,\sin(\beta)\ .$$

Aufgabe 41: Harmonischer Oszillator (schriftlich, 5 Punkte)

Gegeben sei eine Masse m, die unter dem Einfluss einer Federkraft $F = -k\,x$ reibungsfrei schwingt.



a) Geben Sie die Bewegungsgleichung an. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass diese durch $x\,(t) = C_1\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t} + C_2\,\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t}$ gelöst wird. Zeigen Sie, dass folgende drei Funktionen äquivalent zu $x\,(t)$ sind:

$$x\,(t) = \tilde{C}_1\,\cos(\omega\,t) + \tilde{C}_2\,\sin(\omega\,t)$$
$$x\,(t) = A\cdot\cos(\omega\,t + \phi)$$
$$x\,(t) = B\cdot\sin(\omega\,t + \theta)$$

Wie hängen C_1 und C_2 mit den jeweiligen Konstanten zusammen? Drücken Sie dazu Cosinus und Sinus durch komplexe Exponentialfunktionen aus.

b) Bestimmen Sie die jeweiligen Konstanten für die Anfangsbedingungen $x\,(0) = x_0$, $\dot{x}\,(0) = \omega\cdot x_0$.

c) Berechnen Sie die kinetische und die potentielle Energie als Funktion der Zeit für die Anfangsbedingungen $x\,(0) = 0$, $\dot{x}\,(0) = v_0$. Benutzen Sie dazu irgendeine der oben angegebenen Lösungsfunktionen. Wählen Sie dabei die Konstante in der potentiellen Energie derart, dass $V\,(x = 0) = 0$ ist. Wie groß ist die Gesamtenergie E?

Aufgabe 42: Lineare Differentialgleichung (mündlich, 6 Punkte)

Betrachten Sie einen Berg mit dem Höhenprofil $h\,(s) = h_0 - a\,s^2$ $(a > 0)$, wobei s die Fahrstrecke angeben möge. Ein Fahrzeug befindet sich zur Zeit $t = 0$ bei $s\,(0) = -s_0 < 0$ und hat die Geschwindigkeit $\dot{s}\,(0) = v_0 > 0$; es rollt (unter Einfluss der Gravitation) antriebsfrei den Berg hinauf. Reibung trete nicht nicht.

a) Wie groß muss v_0 mindestens sein, damit das Fahrzeug über den Berg kommt? Argumentieren Sie mit dem Energieerhaltungssatz!

b) Stellen Sie mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes die Bewegungsgleichung für $s\,(t)$ auf und lösen Sie sie mittels eines Exponentialansatzes.

c) Bestimmen Sie die Zeit T, zu der das Fahrzeug den Berg überquert hat und sich bei $s\,(T) = +s_0$ befindet (vorausgesetzt, v_0 war groß genug, vgl. a)). Was ergibt sich im Grenzfall $v_0 \to \sqrt{2\,a\,g}\,s_0$? Zeigen Sie, dass sich für sehr großes v_0 näherungsweise $T \approx \dfrac{2\,s_0}{v_0}$ ergibt und erläutern Sie die physikalische Bedeutung dieses Ergebnisses.

d) Falls v_0 nicht groß genug war, rollt das Fahrzeug den Berg rückwärts wieder hinunter. Bestimmen Sie die Zeit $\tilde{T}$, zu der es wieder bei $s\,(\tilde{T}) = -s_0$ ankommt. Was ergibt sich im Grenzfall $v_0 \to \sqrt{2\,a\,g}\,s_0$? Zeigen Sie, dass sich für sehr kleines v_0 näherungsweise $\tilde{T} \approx \dfrac{v_0}{a\,g\,s_0}$ ergibt und erläutern Sie die physikalische Bedeutung dieses Ergebnisses.

Hinweis: für $|u| \ll 1$ gilt: $\ln\left(\dfrac{1+u}{1-u}\right) \approx 2\,u$.