Aufgabe 43: Kugelkoordinaten (mündlich, 3 Punkte)

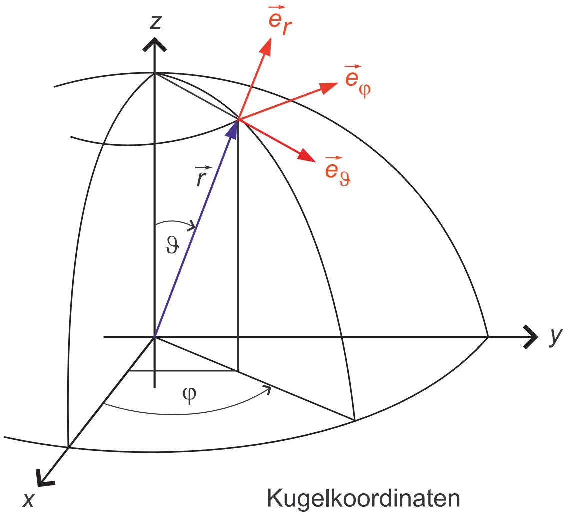
Nach einer Startbahnverlängerung könnte es einen Interkontinentalflug vom Flughafen Münster-Osnabrück (Position $\vec{r}_1$: 52,1° N, 7,7° O) nach New York (Position $\vec{r}_2$: 40,6° N, 73,8° W) geben. Stellen Sie in diesem Zusammenhang einige Berechnungen an, am besten mit Hilfe von Kugelkoordinaten. Am Nordpol möge $\vartheta = 0$ gelten, und der Nullmeridian (↔ Greenwich) möge $\varphi = 0$ definieren. Betrachten Sie die Erde als Kugel mit einem Radius von 6.370 km. Am besten führen Sie komplizierte Rechnungen numerisch durch (mit mehreren Nachkommastellen, damit die Ergebnisse genau genug werden).

a) Bestimmen Sie (in Grad und in Bogenmaß) die Winkel ϑ_1, φ_1 (Münster) und ϑ_2, φ_2 (New York).

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Skalarproduktes den Winkel zwischen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ und daraus die kürzeste Flugstrecke.

c) Ein Schlaumeier meint, ein gerader Tunnel sei doch noch kürzer. Um wieviel? Und welchen Neigungswinkel hätte er am Ein-/Ausgang des Tunnels gegen die Horizontale?

d) In welche Richtung (d. h. mit welchem Winkel z. B. gegen Norden) muss das Flugzeug in Münster starten, um die kürzeste Flugstrecke zu realisieren? Betrachten Sie hierzu z. B. den Differenzvektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ und eliminieren Sie seine lokale vertikale Komponente am Startort.



Kugelkoordinaten

Aufgabe 44: Rotierende Erde und Kugelkoordinaten (mündlich, 3 Punkte)

Wenn Sie in Münster in der Vorlesung sitzen, befinden Sie sich immer in einem Zustand schneller Rotation, da sich die Erde (Radius $R = 6.370\,\text{km}$) in 86.164 s einmal um ihre Achse dreht.

a) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde?

b) Geben Sie die Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten an und berechnen Sie deren zeitliche Ableitung für den Fall $\dot{\vartheta} = 0$. Stellen Sie $\dot{\vec{e}}_r$, $\dot{\vec{e}}_\vartheta$ und $\dot{\vec{e}}_\varphi$ jeweils durch $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$ und $\vec{e}_\varphi$ dar.

c) Verwenden Sie die Kugelkoordinaten, um für einen Körper, der auf der Erdoberfläche ruht, die Geschwindigkeit $\vec{v}$ und die Beschleunigung $\vec{a}$ in Abhängigkeit vom Winkel ϑ zu berechnen.

d) Wie groß ist also die Zentrifugalbeschleunigung, die auf Grund der Erdrotation ein Körper am Äquator und in Münster (52. Breitengrad) erfährt?

e) Wie groß ist die Gesamtkraft auf ein ruhig hängendes Lot? Bestimmen Sie ggf. seine Auslenkung aus der Senkrechten, und zwar am Nord-/Südpol, in Münster (Breitengrad $\alpha = 52°$) und am Äquator. Wie groß ist Ihr Gewicht an diesen Orten?

Aufgabe 45: Auf dem Send (mündlich, 1 Punkt)

Auf dem Send rotiert ein Zylinder mit 6 m Durchmesser um seine horizontale Längsachse. Wie groß darf die Umlaufzeit T des Zylinders maximal sein, damit die Besucher an der Zylinderwand kleben bleiben und nicht herunterfallen?

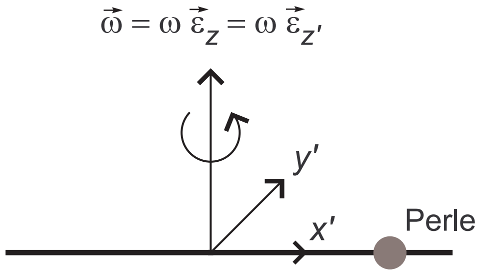
Aufgabe 46: Scheinkräfte (schriftlich, 2 Punkte)

Eine Perle gleite reibungsfrei auf einem Draht, der senkrecht zur z-Achse mit einer festen Frequenz ω rotiert. Es ist zweckmäßig, die Dynamik der Perle in einem mitrotierenden Koordinatensystem zu behandeln, da hier die Bewegung der Perle nur entlang der x'-Richtung erfolgt.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für x' auf. Welche Scheinkräfte beeinflussen die Bewegung?

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $x'(0) = x'_0$ und $v'_x(0) = 0$ (*Hinweis:* Verwenden Sie den Ansatz $x'(t) = e^{\alpha t}$.) Skizzieren Sie den Bewegungsverlauf als Funktion der Zeit.

c) Berechnen Sie die Energie der Perle im rotierenden System.



Aufgabe 47: Matrizen und Determinanten (schriftlich, 2 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und der Vektor} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

a) $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}$ und $\vec{a}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}$

b) $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ und $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$

c) $\det \underline{\underline{A}} + \det \underline{\underline{B}}$ und $\det\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\right)$

d) $\det \underline{\underline{A}} \cdot \det \underline{\underline{B}}$ und $\det\left(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}\right)$

Aufgabe 48: **Mehrfachdrehungen eines kartesischen Koordinatensystems im $\mathbb{R}^3$** **(mündlich, 3 Punkte)**

Gegeben sei der Ortsvektor $\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$ in der kartesischen Orthonormalbasis $\{\vec{e}_i\}$, d. h. im kartesischen Koordinatensystem S.

a) Gehen Sie zunächst durch eine positive Drehung um den Winkel $\varphi = 45°$ um die z-Achse zu einem neuen orthogonalen Rechtssystem $\{\vec{e}_i^{\,\prime}\}$ über. Geben Sie die zugehörige Drehmatrix $\underline{\underline{D}}_1$ und den Ortsvektor $\vec{r}^{\,\prime}$ im neuen Koordinatensystem S' an.

b) Gehen Sie nun durch eine positive Drehung um den Winkel $\phi = 45°$ um die y'-Achse zu einem zweiten orthogonalen Rechtssystem $\{\vec{e}_i^{\,\prime\prime}\}$ über. Geben Sie die zugehörige Drehmatrix $\underline{\underline{D}}_2$ und den Ortsvektor $\vec{r}^{\,\prime\prime}$ im zweiten neuen Koordinatensystem S'' an.

c) Geben Sie die Drehmatrix $\underline{\underline{D}}_3$ an, welche die gesamte Drehung beschreibt (Reihenfolge beachten!).

Aufgabe 49: **Mehrfachdrehungen und Additionstheoreme** **(schriftlich, 3 Punkte)**

Betrachten Sie eine orthogonale Drehung des Koordinatensystems um die z-Achse um den Winkel $\phi_1 \pm \phi_2$. Geben Sie die zugehörige Drehmatrix $\underline{\underline{D}}$ an.

Natürlich kann man diese Drehung auch als zwei aufeinanderfolgende Drehungen um dieselbe z-Achse beschreiben. Geben Sie die beiden Drehmatrizen $\underline{\underline{D}}_1$ und $\underline{\underline{D}}_2$ an und leiten Sie durch Vergleich mit $\underline{\underline{D}}$ die Additionstheoreme für $\cos(\phi_1 \pm \phi_2)$ und $\sin(\phi_1 \pm \phi_2)$ ab.

Aufgabe 50: **Coriolis-Kraft auf der Erde** **(schriftlich, 3 Punkte)**

a) Wie beeinflusst die Coriolis-Kraft Körper, die sich von Norden nach Süden bzw. von Westen nach Osten bewegen? Unterscheiden Sie dabei zwischen Bewegungen auf der Nord- und der Südhalbkugel.

b) Ein Massenpunkt bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v_\vartheta\,\vec{e}_\vartheta + v_\varphi\,\vec{e}_\varphi$ entlang der Erdoberfläche. Bestimmen Sie den Anteil $\vec{F}_{C,\parallel}$ der Coriolis-Kraft entlang der Erdoberfläche (indem Sie den Anteil senkrecht der Oberfläche eliminieren). Zeigen Sie, dass $|\vec{F}_{C,\parallel}| = 2\,m\,\omega\,v\,|\cos\vartheta|$ gilt, unabhängig von der Richtung von $\vec{v}$.

c) Die Schwingungsebene eines Foucault-Pendels benötigt für eine volle Umdrehung eine Zeit T_α, die vom Breitengrad α abhängt. An den Polen gilt $T_{\pm 90°} = 1$ Tag. Benutzen Sie das Ergebnis von b), um T_α zu bestimmen. Wie groß ist T_α in Münster ($\alpha = 52°$)? Wie groß ist T_α am Äquator?

d) Ein ICE ($m = 3.000$ t) fährt mit 270 km/h auf der Strecke Hannover-Fulda genau von Nord nach Süd. Wie groß ist die auf ihn wirkende Coriolis-Kraft beim Überqueren des 52. Breitengrades? Vergleichen Sie diese Kraft mit der auf den Zug wirkenden Gewichtskräfte.