Aufgabe 1 (mündlich): Magnetfelder von Spulen (12 Punkte)

a) Gegeben sei ein unendlich dünner Drahtring mit Radius *R*, durch den ein Strom *I* fließt. Berechnen Sie das Magnetfeld *B* gemäß dem Biot-Savart'schen Gesetz auf der Symmetrieachse und skizzieren Sie den Verlauf von *B* auf dieser Achse.

b) Eine Helmholtz-Spule besteht aus zwei solchen Drahtringen, wie sie unter a) beschrieben sind. Diese Drahtringe sind parallel im Abstand *d* voneinander auf der Symmetrieachse angeordnet und werden gleichsinnig von einem Gleichstrom *I* durchflossen. Wie groß muss der Abstand *d* gewählt werden, damit das *B*-Feld auf der Symmetrieachse möglichst homogen ist, d.h. möglichst viele Terme der Taylorentwicklung von *B* um den Mittelpunkt zwischen den Spulen verschwinden?

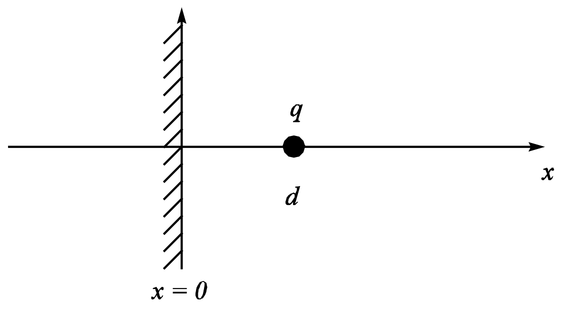
c) Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von Teilaufgabe a) das Magnetfeld im Mittelpunkt einer Spule der Länge *L* mit *N* Windungen (Hinweis: Unter der Annahme, dass die Windungen genügend dicht liegen, kann man von der Summe über die Kreisströme zum Integral übergehen.) Was ergibt sich für $\vec{B}$ speziell bei einer Spule mit $N = 1000$ Windungen, Länge $L = 20\,\mathrm{cm}$, Radius $R = 2\,\mathrm{cm}$, Stromstärke $I = 1\,A$. Wie groß ist $\vec{B}$ bei einer langen Spule $(L >> R)$?

Aufgabe 2 (schriftlich): Die Methode der Bildladungen (12 Punkte)

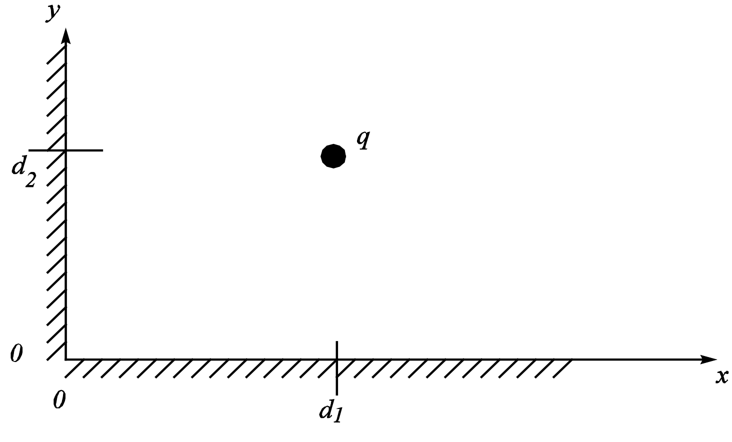
Im Fall der Elektrostatik kann im Innern eines Leiters kein elektrisches Feld existieren. Deshalb bildet eine Leiteroberfläche eine Äquipotentialfläche. Zur Berechnung des elektrostatischen Potentials $\phi(\vec{r})$ einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ in Gegenwart metallischer Körper muss deshalb die Poissongleichung $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ mit der Randbedingung $\phi = \mathrm{const.}$ auf der Metalloberfläche gelöst werden. Für Systeme mit genügend hoher Symmetrie ist hier häufig die Methode der Bildladungen hilfreich.

a) Bestimmen Sie das Potential einer Punktladung *q*, die sich im Abstand *d* vor einer ebenen Metallplatte befindet.

Was ergibt sich speziell für das Potential $\phi(x,0,0)$ auf der *x*-Achse? Wie verhält sich $\phi(x,0,0)$ für große *x*, d.h. $x >> d$?



b) Bestimmen Sie das Potential für eine Punktladung, die sich vor zwei unendlich ausgedehnten leitenden Ebenen, welche sich in einem Winkel von 90° schneiden, befindet.
Wie lautet im Spezialfall $d_1 = d_2 = d$ das Potential $\phi(x,x,0)$ auf der Winkelhalbierenden $x = y$? Wie verhält sich $\phi(x,x,0)$ für große *x*, d.h. $x >> d$?



c) Zeigen Sie, dass sich auch das Problem einer Punktladung, die sich im Außenraum einer geerdeten leitenden Kugel befindet, durch die Methode der Bildladungen lösen lässt; d.h. man kann die Lösung der Poissongleichung mit der Randbedingung $\phi = 0$ für das Potential auf der Kugeloberfläche im Außenraum der Kugel konstruieren, in dem man zu dem Potential der Punktladung noch das Potential einer geeigneten Bildladung innerhalb der Kugel hinzufügt. Bestimmen Sie Lage und Ladung dieser Bildladung.

!Bitte die TE Aufgaben separat abgeben!

TE-Aufgabe TE1 (mündlich): Addition von Geschwindigkeiten (6 Punkte)

a) Ein Flugzeug mit einer Geschwindigkeit von 2500 km/h schießt ein Geschoss mit einer Geschwindigkeit von 3500 km/h ab. Welche Geschwindigkeit des Geschosses misst ein Beobachter auf der Erde? Kann er relativistische Effekte messen? Berechnen Sie dazu die Laufzeit des Geschosses auf 1 km nicht-relativistisch und relativistisch.

b) Ein radioaktiver Kern fliegt mit einer Geschwindigkeit von $v = 0.5c$ in x-Richtung. In seinem Ruhesystem sendet er Elektronen mit einer Geschwindigkeit von $0.6c$ aus. Welche Geschwindigkeit haben die Elektronen im Laborsystem, wenn sie im Ruhesystem (i) in positiver x-Richtung, oder (ii) in negativer x-Richtung emittiert werden?

TE-Aufgabe TE2 (schriftlich): Raumschiffe (6 Punkte)

Ein Beobachter im Inertialsystem Σ sieht zwei Raumschiffe F und K, die mit der konstanten Geschwindigkeit αc mit $0 < \alpha < 1$ in entgegengesetzte Richtung fliegen, d.h.

$$\vec{v}_F = -\alpha c \, \vec{e}_x \quad \text{und} \qquad \vec{v}_K = \alpha c \, \vec{e}_x$$

a) Bestimmen Sie, welche Geschwindigkeit als Funktion von α das Raumschiff F bezogen auf das Raumschiff K hat und skizzieren Sie das Resultat. Was wäre nicht-relativistisch gerechnet zu erwarten?

b) Geben Sie die Limites der Formeln aus (a) für große Raumschiffgeschwindigkeiten $\alpha' = (1-\alpha) \ll 1$ und kleine Raumschiffgeschwindigkeiten $\alpha \ll 1$ an.

TE-Aufgabe TE3 (schriftlich): Lorentz-Invarianten (8 Punkte)

Für ein Inertialsystem Σ', das sich mit der Geschwindigkeit v in Richtung der x-Achse entfernt, lautet die zugehörige Lorentz-Transformation:

$$x' = \gamma(x - vt),\; y' = y,\; z' = z,\; t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \text{ mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Eine Lorentz-Invariante ist eine Größe, die unter einer Lorentz-Transformation unverändert bleibt.

a) Zeigen Sie, dass für den Abstand zweier Punkte in der Raum-Zeit gilt:

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - \left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\right]$$

ist eine Lorentz-Invariante.

b) Zeigen Sie, dass der d'Alembert-Operator

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

eine Lorentz-Invariante ist.

Es genügt dabei, sich auf den Fall zu beschränken, in dem sich Σ' entlang der x-Achse bewegt.