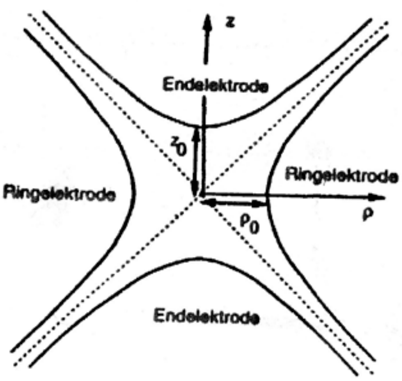
Aufgabe 5 (mündlich): Penning Falle (12 Punkte)

Um an einzelnen Atomen, Ionen oder Elektronen Experimente durchführen zu können, ist es notwendig, das zu untersuchende Teilchen in einem definierten Raumgebiet einzuschließen. Dies gelingt bei geladenen Teilchen mit der Penning Falle („Penning trap"). In dieser Aufgabe soll ein idealisiertes Modell dieser Falle untersucht werden.

a) Das Teilchen mit Masse m und Ladung e befinde sich zunächst in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Warum genügt dies nicht, um das Teilchen einzuschließen?
(Hinweis: Was passiert bei kleinen Störungen?)

b) Um die Bewegung in der z-Richtung einzuschränken, wird ein zusätzliches elektrisches Feld angelegt. Offensichtlich eignet sich ein durch zwei Elektroden erzeugtes Dipolfeld nicht (warum?). Deshalb wird die zylindersymmetrische Abordnung aus drei Elektroden (siehe Abbildung) verwendet, bestehend aus den zwei Endelektroden auf den beiden Zweigen des Rotationshyperboloids $z^2 = z_0^2 + \frac{1}{2}\rho^2$ und der Ringelektrode auf dem Rotationshyperboloid $z^2 = \frac{1}{2}\left(\rho^2 - \rho_0^2\right)$. (Es werden Zylinderkoordinaten ρ, φ, z verwendet. ρ_0 und z_0 sind Konstanten).



Zeigen Sie, dass das elektrostatische Potential gegeben ist durch $\phi = a\left(z^2 - \frac{1}{2}\rho^2\right) + b$

d. h. zeigen Sie, dass ϕ die Laplace-Gleichung $\Delta\,\phi = 0$ erfüllt und dass die Elektroden Äquipotentialflächen sind. Wie müssen a und b gewählt werden, damit die Endelektroden auf $\phi = V_0/2$ und die Ringelektrode auf $\phi = -V_0/2$ liegen?

c) Stellen Sie nun unter Verwendung der durch elektrisches und magnetisches Feld erzeugten Lorentzkraft $\vec{F} = e\left(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}\right)$ die Bewegungsgleichung des Teilchens auf. Separieren Sie mit dem Ansatz $\vec{r} = \vec{\rho} + z\vec{e}_z \quad , \quad \vec{\rho}\cdot\vec{e}_z = 0$, die Bewegungsgleichungen in der z-Richtung und in der xy-Ebene und lösen Sie die Bewegungsgleichung in z-Richtung. Wie sieht die Bewegung in der xy-Ebene ohne Magnetfeld aus?

d) Die Gleichung für die Bewegung in der Ebene lässt sich schreiben als

$$\ddot{\vec{\rho}} + \omega_c \vec{e}_z \times \dot{\vec{\rho}} - \frac{1}{2}\omega_z^2 \vec{\rho} = 0 .$$

Durch Einführung der beiden Vektoren $\vec{V}_\mp = \dot{\vec{\rho}} + \omega_\pm \vec{e}_z \times \vec{\rho}$ und geeignete Wahl von $\omega_\pm$ erhält man zwei entkoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung. Wie lässt sich $\vec{\rho}$ aus $\vec{V}_+$ und $\vec{V}_-$ berechnen? Wie müssen ω_+ und ω_- gewählt werden, damit die Bewegungsgleichungen entkoppeln? Wie lauten dann die beiden Bewegungsgleichungen? (Hinweis: Für einen beliebigen Vektor $\vec{\rho}$ in der xy-Ebene gilt: $\vec{\rho} = -\vec{e}_z \times \left(\vec{e}_z \times \vec{\rho}\right)$).

e) Welche Bewegungen beschreiben die beiden Bewegungsgleichungen und was folgt daraus für die Bewegung von $\vec{\rho}$? (Hinweis: Vergleichen Sie die Gleichungen mit der Bewegungsgleichung eines Teilchens in einem homogenen Magnetfeld.) Üblicherweise ist in Experimenten $\omega_c >> \omega_z$. Was folgt daraus für $\omega_\pm$?

Literaturhinweis zur Vertiefung: L.S. Brown und G. Gabrielse: Geonium theory – Physics of a single electron or ion in a Penning trap, Rev. Mod. Phys. **58**, 233-311 (1986).

Aufgabe 6 (schriftlich): Stromdurchflossener Draht (10 Punkte)

Gegeben sei ein unendlich langer zylindrischer Draht mit Radius *R*, der homogen vom Strom *I* durchflossen wird.

a) Lösen Sie die Potentialgleichung

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

durch direkte Integration im gesamten Raum. Verwenden Sie dazu den Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten sowie geeignete Symmetrieüberlegungen.

b) Berechnen Sie das dazugehörige Magnetfeld $\vec{B}$.

c) Benutzen Sie nun das Amperesche Gesetzes

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I ,$$

als alternative Möglichkeit, das Magnetfeld direkt, d.h. ohne Verwendung des Vektorpotentials, zu berechnen.

d) Berechnen Sie den Poynting-Vektor. Nehmen Sie dazu für das elektrische Feld an, dass das Ohmsche Gesetz für jedes Leiterstück lokal gilt, d.h. Stromdichte und elektrisches Feld hängen über die Leitfähigkeit σ voneinander ab $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

e) Überprüfen Sie, ob die Kontinuitätsgleichung für die Energie erfüllt ist.

!Bitte die TE Aufgaben separat abgeben!

TE-Aufgabe TE4 (mündlich): Raum-Zeit-Diagramme (4 Punkte)

Vergleichen Sie das Raum-Zeit-Diagramm zur Lorentz-Transformation mit dem Raum-Zeit Diagramm zur Galilei-Transformation. In beiden Fällen ist die Länge der Einheitsstrecke auf der t'-Achse größer als diejenige auf der t-Achse. Wieso kommen wir dann in einem Fall zu dem Schluss, dass die absolute Zeit existiert, in dem anderen, dass sie nicht existiert?

TE-Aufgabe TE5 (mündlich): Uhren (4 Punkte)

Zwei synchronisierte Uhren A und B haben auf der Erde einen Abstand von 600 km. Eine Rakete fliegt mit der Geschwindigkeit $v = \frac{12}{13}c$ über die Erde hinweg und kommt erst au Uhr A, dann an Uhr B vorbei. Bei A zeigt eine Uhr in der Rakete die gleiche Zeit wie Uhr A an. Welche Zeit zeigt die Raketenuhr im Vergleich zur Uhr B an, wenn sie über diese hinwegfliegt?

TE-Aufgabe TE6 (schriftlich): Gleichzeitigkeit im Minkowski-Diagramm (6 Punkte)

Zwei Ereignisse sollen im System Σ im Abstand Δx gleichzeitig erfolgen. Wie groß ist der Zeitunterscheid dieser Ereignisse gesehen von einem mit der Geschwindigkeit v bewegten Inertialsystem Σ'. Zeichnen Sie dazu ein Minkowski-Diagramm.

TE-Aufgabe TE7 (schriftlich): Raumschiff im Minkowski-Diagramm (6 Punkte)

Ein Raumschiff der Eigenlänge 100 m fliegt mit $v = 0.6c$ an einer interplanetaren Station vorbei. Als die Spitze des Raumschiffs einen Sendemast der Raumstation passiert, wird ein Radiosignal ausgesandt.

a) Nach welcher Zeit erreicht das Signal das Heck des Raumschiffs?

b) Nach welcher Zeit passiert das Heck des Raumschiffs den Sendemast?

Geben Sie die Zeiten jeweils in Raumschiffzeit und Stationszeit an. Lösen Sie die Aufgabe zeichnerisch mit einem Minkowski-Diagramm und rechnerisch.