Aufgabe 16 (mündlich): Klassisches Modell des Wasserstoffatoms (12 Punkte)
Im klassischen Modell eines Wasserstoffatoms bewegt sich ein Elektron mit Masse m und Ladung $-e$ auf einer Kreisbahn mit Radius R um ein im Ursprung ruhendes Proton mit Ladung $+e$. Es wirkt dabei die Coulombkraft $\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$. Da es sich bei der Kreisbewegung um eine beschleunigte Bewegung handelt, wird Energie in Form von elektromagnetischen Wellen abgestrahlt, die der Kreisbewegung verloren geht. Das Elektron wird sich deshalb dem Proton immer mehr annähern und schließlich in dieses hineinstürzen. Dieses Problem der Instabilität der Atome war ein zentrales Problem der klassischen Physik und konnte erst durch die Quantenmechanik gelöst wurden.

a) Das Elektron bewege sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn in der xy-Ebene um das Proton und beide Teilchen als sollen als Punktladungen beschrieben werden. Damit lautet die Ladungsdichte
$$\rho(\vec{r},t) = -e\,\delta\big(x - R\cos(\omega t)\big)\,\delta\big(y - R\sin(\omega t)\big)\,\delta(z) + e\,\delta(\vec{r})\,.$$
Berechnen Sie das Dipolmoment $\vec{p}(t)$ dieser Ladungsverteilung und geben Sie die komplexe Amplitude $\vec{p}$ von $\vec{p}(t) = \mathrm{Re}\left[\vec{p}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\right]$ an.

b) Berechnen Sie den über eine Periode gemittelten Poyntingvektor $\bar{\vec{S}}$ sowie die zeitgemittelte gesamte Strahlungsleistung $\bar{P}_S$ für diese Kreisbewegung. Verwenden Sie hierzu die in der Vorlesung hergeleiteten Formel
$$\bar{\vec{S}} = \frac{\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\left|\vec{n}\times\vec{p}\right|^2}{r^2}\vec{n} \qquad \text{mit} \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$
und die Definition $\bar{P}_S = \oint \bar{\vec{S}}\cdot\vec{n}\,df$, wobei über eine geschlossene Kugeloberfläche integriert wird. Hinweis: Es gilt die Formel $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right) - \left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$.

c) Drücken Sie die mechanische Energie E, den Drehimpuls L und die Winkelgeschwindigkeit ω des Elektrons als Funktion des Bahnradius R aus.

d) Die abgestrahlte Leistung führt zu einer Abnahme des Bahnradius $R(t)$. Stellen Sie mit Hilfe der Energiebilanz eine Differentialgleichung für $R(t)$ auf und integrieren Sie diese mit der Anfangsbedingung $R(0) = a_B$. Dabei ist a_B der Bohrscher Radius, d.h. der Radius, für den der Drehimpuls L den Wert $\hbar = h/2\pi = 1{,}054\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$ annimmt (h: Plancksches Wirkungsquantum). Bestimmen sie die „Spiralzeit“ τ, nach der das Elektron in das Proton fällt.

e) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Energie $E(t)$ und des Drehimpulses $L(t)$.

Aufgabe 17 (schriftlich): Strahlender Dipol (12 Punkte)
Ein durch Abstrahlung elektromagnetischer Wellen gedämpft schwingender Dipol wird näherungsweise durch die Bewegungsgleichung
$$\frac{d^2p}{dt^2} + \omega_0^2 p = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3}\frac{d^3p}{dt^3} \tag{1}$$
beschrieben. Im Folgenden soll diese Bewegungsgleichung begründet und näherungsweise gelöst werden.

a) Ein Federpendel als Modell für den Dipol bestehe aus einem Massenpunkt m mit Ladung e und einer Feder mit Federkonstanten $D = m\omega_0^2$. Sei x die Auslenkung des Massenpunkts, dann ist das Dipolmoment gegeben durch $p = ex$. Leiten Sie aus der Bewegungsgleichung (1) eine Gleichung für die zeitliche Änderung der mechanischen Gesamtenergie des Dipols her.

b) Ist der Energieverlust pro Schwingungsperiode nicht zu groß, kann in guter Näherung angenommen werden, dass der Dipol weiterhin mit der Frequenz ω_0 schwingt. Zeigen Sie, dass in diesem Fall der über eine Periode gemittelte Verlustterm in der Gleichung für die mechanische Energie mit der in der Vorlesung hergeleiteten über eine Periode gemittelten abgestrahlten Leistung eines Hertzschen Dipols übereinstimmt.

c) Die Bewegungsgleichung (1) als lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten kann mit dem Ansatz einer Exponentialfunktion mit Frequenz ω gelöst werden. Welcher Gleichung muss die (komplexe) Frequenz ω genügen?

d) Unter der Bedingung, dass der Energieverlust pro Periode klein ist gegen die Gesamtenergie, kann die Gleichung für ω näherungsweise gelöst werden. Zeigen Sie, dass

$$\lambda = \frac{e^2\omega_0}{6\pi\varepsilon_0 mc^3}$$

ein geeigneter Kleinheitsparameter ist. Setzen Sie ω als Potenzreihe in λ an gemäß

$$\omega = \omega^{(0)} + \lambda\omega^{(1)} + \lambda^2\omega^{(2)} + \ldots$$

und bestimmen Sie durch Koeffizientenvergleich die Frequenz ω bis zur ersten Ordnung in λ.

e) Der Dipol werde nun zur Zeit $t = 0$ so präpariert, dass er für $t > 0$ die Bewegung $p(t) = p_0 \,\mathrm{Re}\left[e^{-i\omega t}\right]$ (mit ω aus Teilausgabe d)) vollführt. Für $t < 0$ sei $p(t) = 0$. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\tilde{p}(\omega)$ von $p(t)$ und das Leistungsspektrum $\left|\tilde{p}(\omega)\right|^2$.

f) In der Nähe der Resonanzfrequenz kann das Ergebnis für das Leistungsspektrum noch vereinfacht werden. Dort gilt mit $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} << 1 \text{ und weiterhin } \lambda << 1.$$

Nehmen Sie hierzu im Zähler und Nenner des Leistungsspektrums nur jeweils die niedrigsten Terme in $\Delta\omega/\omega_0$ und λ mit. Wie groß ist die Halbwertsbreite $\delta\omega$ des Leistungsspektrums? Skizzieren Sie $\left|\tilde{p}(\omega)\right|^2$.

!Bitte die TE Aufgaben separat abgeben!

TE-Aufgabe TE12 (mündlich): Levi-Civita Tensor 4. Stufe (5 Punkte)

Der Levi-Civita Tensor 4. Stufe ist wie folgt definiert:

$$\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} = \begin{cases} +1 & \text{für } \mu\nu\kappa\lambda \text{ gerade Permutation von } \{0,1,2,3\} \\ -1 & \text{für } \mu\nu\kappa\lambda \text{ ungerade Permutation von } \{0,1,2,3\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wie viele Elemente sind ungleich Null? Bestimmen Sie alle Elemente, für die $\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} = 1$ bzw. $\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} = -1$ ist.

TE-Aufgabe TE13 (mündlich): Gruppen-Eigenschaften (6 Punkte)

Betrachten Sie Inertialsysteme, die sich mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung relativ zueinander bewegen. Diese dazugehörigen Lorentz-Transformationen bilden eine Untergruppe der Lorentz-Gruppe. Zeigen Sie, dass diese Untergruppe alle Eigenschaften einer abelschen Gruppe erfüllt.

i. Abgeschlossenheit (Sie können hier das Ergebnis von Aufgabe TE14 übernehmen).
ii. Es gilt das Assoziativ-Gesetz.
iii. Es existiert ein Eins-Element.
iv. Es gibt ein inverses Element.
v. Es gilt das Kommutativ-Gesetz.

Geben Sie das Eins-Element und das inverse Element explizit an.
Gilt auch für die vollständige Lorentz-Gruppe, dass sie abelsch, d.h. kommutativ ist?

TE-Aufgabe TE14 (schriftlich): Verknüpfung von Lorentz-Transformationen (8 Punkte)

Betrachten Sie zwei Lorentz-Transformationen für Inertialsysteme, die sich in x-Richtung relativ zueinander bewegen. Dabei habe $(L_1)^\mu{}_\nu$ die Geschwindigkeit v_1 und $(L_2)^\mu{}_\nu$ die Geschwindigkeit v_2. Zeigen Sie, dass $(L_3)^\mu{}_\nu = (L_1)^\mu{}_\lambda (L_2)^\lambda{}_\nu$ auch eine Lorentz-Transformation ist und die Geschwindigkeit v_3 hat. Wie lautet v_3?