Aufgabe 21 (mündlich): Čerenkov-Strahlung (12 Punkte)

Die Liénard-Wiechert Potentiale eines Teilchens mit Ladung q und Bahnkurve $\vec{r}_0(t)$ sind gegeben durch

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t_{\text{ret}})|}\frac{1}{\kappa(\vec{r},t_{\text{ret}})}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \varepsilon_0\mu_0\,\dot{\vec{r}}_0(t_{\text{ret}})\,\phi(\vec{r},t)$$

mit
$$\kappa(\vec{r},t_{\text{ret}}) = 1 - \frac{\dot{\vec{r}}_0(t_{\text{ret}})}{c}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0(t_{\text{ret}}))}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t_{\text{ret}}))|}.$$

Dabei ist die retardierte Zeit t_{ret} implizit durch die Gleichung $t_{\text{ret}} = t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_0(t_{\text{ret}})|$ gegeben; sie erfüllt offensichtlich die Kausalitätsbedingung $t > t_{\text{ret}}$.

a) Die Bahnkurve des Teilchens sei $\vec{r}_0(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$ mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$. Zeigen Sie, dass

$$(t - t_{\text{ret}}) = \frac{1}{(c^2 - v^2)}\left(\vec{x}\cdot\vec{v} \pm x\,c\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2(\alpha)\right)^{1/2}\right) \tag{1}$$

gilt, wobei $\vec{x} = \vec{r} - \vec{r}_0 - \vec{v}t$ und α den Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{v}$ darstellt.

Hinweis: Führen Sie $\vec{x}$ noch vor dem Quadrieren der impliziten Gleichung ein.

b) Zeigen Sie, dass sich für $v < c$ die folgenden Potentiale ergeben:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{x}(t)|}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2(\alpha)\right)^{-1/2} \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{v}}{|\vec{x}(t)|}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2(\alpha)\right)^{-1/2}$$

In diesem Fall $v < c$ gibt das Teilchen keine Strahlung ab.

Hinweis: Begründen Sie, dass in diesem Fall nur das obere Vorzeichen in Gl. (1) die Kausalitätsbedingung erfüllt.

c) Bewegt sich nun das Teilchen mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$ in Materie, so muss die Lichtgeschwindigkeit c durch $c' = \frac{c}{n}$ mit dem Brechungsindex *n* ersetzt werden. Hier kann der Fall $c > v > c'$ auftreten. Zeigen Sie, dass nur für Winkel α, die folgende Ungleichung $\pi - \arcsin(c'/v) < \alpha \le \pi$ genügen, Gl. (1) reelle Lösung besitzt, die die Kausalitätsbedingungen erfüllen. Für diese Winkel ergeben sich die Potentiale analog wie in Teilaufgabe b). Für welchen kritischen Winkel treten Singularitäten in den Potentialen auf? Skizzieren Sie den Bereich, relativ zur Bewegungsrichtung $\vec{v}$, in dem die Lösungen für die Potentiale existieren. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 22 (schriftlich): TM-Wellen im Hohlleiter (12 Punkte)

Gegeben sei ein in z-Richtung unendlich ausgedehnter Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt der Kantenlängen a und b. Sie haben in der Vorlesung die Ausbreitung von TE-Wellen in diesem System kennengelernt. Berechnen Sie jetzt die elektrischen und magnetischen Felder von TM-Wellen in dem Hohlleiter.

a) Unter der Berücksichtigung der Randbedingungen ($\vec{E}_{\text{tang}} = 0, \vec{B}_{\text{normal}} = 0$ an Metalloberflächen) und der Maxwell-Gleichungen lässt sich das Magnetfeld folgendermaßen darstellen:

$$B_x = B_{0x}\sin(k_x x)\,\cos(k_y y)\,\cos(\omega t - k_z z)$$

$$B_y = B_{0y}\cos(k_x x)\,\sin(k_y y)\,\cos(\omega t - k_z z)$$

$$B_z = 0$$

Begründen Sie, warum bezüglich der Abhängigkeit des Magnetfeldes von (x, y) nur die angegebenen Kombinationen von sin- und cos- Funktionen beitragen

b) Berechnen Sie das elektrische Feld der TM-Wellen.

c) Berechnen Sie die Dispersionsrelation des Hohlleiters. Wie groß ist die Grenzfrequenz ω_G für $a = b$ bei TM-Wellen?

d) Zeichnen Sie für den Fall $a = b$ die Dispersionskurve $\omega_{n_x n_y}(k_z)$ für die TM-Welle mit der niedrigsten Frequenz. Erklären Sie physikalisch, warum diese Dispersion für $\omega \gg \omega_G$ mit der Dispersion elektromagnetischer Wellen im Vakuum übereinstimmt.

!Bitte die TE Aufgaben separat abgeben!

TE-Aufgabe TE15 (mündlich): Massenträgheit (6 Punkte)

Ein elektrisch geladenes Teilchen der Ruhemasse m_0 und Ladung q bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung. An der Stelle $x = 0$ kommt es in einen Bereich mit homogenem elektrischem Feld (i) $\vec{E} = E\,\vec{e}_x$ bzw. (ii) $\vec{E} = E\,\vec{e}_y$ und erfährt eine Beschleunigung in Richtung des Feldes. Diskutieren Sie die effektive träge Masse (Kraft durch Beschleunigung) an dieser Stelle für die beiden Fälle.

TE-Aufgabe TE16 (schriftlich): Relativistischer freier Fall (8 Punkte)

Gesucht ist die Geschwindigkeit $v(t)$ und die Höhe $z(t)$ eines relativistischen Teilchens der Ruhemasse m_0, das zur Zeit $t = 0$ aus der Höhe H mit der Anfangsgeschwindigkeit $v = 0$ in einem homogenen Schwerefeld mit Schwerebeschleunigung $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$ losgelassen wird.

a) Die Bewegungsgleichung der relativistischen Bewegung lautet $\frac{d}{dt}\vec{p}_N = \vec{F}_N$ mit dem relativistischen Newtonschen Impuls $\vec{p}_N = m(v)\,\vec{v}$ und der relativistischen Masse $m(v) = m_0 / \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Die Newtonsche Kraft sei gegeben durch $\vec{F}_N = m(v)\,\vec{g}$. Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Geschwindigkeit $v(t)$ auf und lösen Sie diese durch Separation der Variablen. Was ergibt sich für $v(t)$ in den Grenzfällen $t \ll c/g$ und $t \gg c/g$?

b) Berechnen Sie durch Integration der Geschwindigkeit die Höhe $z(t)$. Was ergibt sich für $z(t)$ in den Grenzfällen $t \ll c/g$ und $t \gg c/g$?

Nützliche Integrale:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{Ar}\tanh x \qquad\qquad \int \tanh x\, dx = \ln\cosh x$$

Dabei ist $\mathrm{Ar}\tanh x$ die Umkehrfunktion von $\tanh x$.

TE-Aufgabe TE17 (schriftlich): Strahlender Zerfall (8 Punkte)

Ein angeregtes, ruhendes Atom mit der Ruhemasse M_0 emittiert ein Photon mit der Energie $\hbar\omega$ und dem Impuls $|\vec{p}| = \hbar\omega / c$. Nach der Emission hat das Atom die neue Ruhemasse M_0'. Bestimmen Sie einen Ausdruck für $\hbar\omega$ in Abhängigkeit von der Energieänderung $\Delta E = (M_0 - M_0')c^2$ und M_0. Zeigen Sie, dass die für diese Emission häufig verwendete Beziehung $\Delta E = \hbar\omega$ nur im Grenzfall großer Atommassen gilt.

Tipp: Betrachten Sie die Emission als Stoßprozess.