1. Übung Theoretische Ergänzungen zur Physik III (WS 2014/15) **Prof. Rohlfing**

Abgabedatum: 29.10.2014, 10:30, Briefkasten neben IG1 85 Besprechung: 03./04.11.2014

TE-Aufgabe 1: Area sinus hyperbolicus **(schriftlich, 5 Punkte)**

Bei einigen Rechnungen in der relativistischen Mechanik tritt die Funktion $y = \operatorname{arsinh}(x)$ auf. Sie ist die Umkehrfunktion von

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} .$$

Diese Aufgabe soll Sie an die wesentlichen Eigenschaften von $\operatorname{arsinh}(x)$ erinnern.

a) Skizzieren Sie $y = \sinh(x)$ und $y = \operatorname{arsinh}(x)$.

b) Zeigen Sie, dass $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \operatorname{arsinh}(x)$ gilt. Nutzen Sie dabei die Eigenschaften von $x = \sinh(y)$ aus.

c) Berechnen Sie die Ableitung $\frac{d}{d\,x}\operatorname{arsinh}(x)$ unter Verwendung der Rechenregel für Umkehrfunktionen.

d) Zeigen Sie, dass folgende Beziehung gilt:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,d\,x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^2}{2}\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) .$$

TE-Aufgabe 2: Galilei-Transformation **(schriftlich, 7 Punkte)**

a) Die Newton'schen Bewegungsgleichungen für N Teilchen, die über konservative Paar-Kräfte mineinander wechselwirken, lauten

$$m_i \frac{d^2\,\vec{r}_i}{d\,t^2} = -\nabla\,U\left(|\vec{r}_i - \vec{r}_1|, \ldots, |\vec{r}_i - \vec{r}_N|\right) , \qquad i = 1, \ldots, N .$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichungen unter Galilei-Transformationen (ohne Drehung) ihre Gestalt beibehalten.

b) In einer elektromagnetischen Welle im Vakuum genügen die Komponenten des elektromagnetischen Feldes der Wellengleichung

$$\Delta\,\phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\,t^2}\phi(\vec{r}, t) = 0 .$$

Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass diese Wellengleichung nicht mit den Galilei-Transformationen verträglich ist.

TE-Aufgabe 3: Lorentz-Transformation (mündlich, 8 Punkte)

Betrachten Sie eine Lorentz-Transformation

$$ct' = \gamma\,(ct - \beta \cdot x)\ , \qquad x' = \gamma\,(x - \beta \cdot ct)$$

zwischen zwei Inertialsystemen Σ und Σ', die sich mit Geschwindigkeit v (in x-Richtung) relativ zueinander bewegen. Es sei

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \text{und} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\ .$$

a) Betrachten Sie zwei Ereignisse (1, 2), die im System Σ am gleichen Ort ($x_1 = x_2$), aber zu unterschiedlichen Zeiten ($t_2 = t_1 + \Delta t$) stattfinden. Welchen Zeitunterschied $\Delta t'$ misst man im System Σ'?

b) Betrachten Sie zwei Ereignisse (1, 2), die im System Σ zur gleichen Zeit ($t_1 = t_2$), aber an unterschiedlichen Orten ($x_2 = x_1 + \Delta x$) stattfinden. Welchen Ortsunterschied $\Delta x'$ misst man im System Σ'?

c) Das Ergebnis aus b) scheint dem Konzept einer „Längenkontraktion“ zu widersprechen. Für eine „Längenmessung“ müssen aber die beiden Endpunkte einer Länge (z. B. eines Stabes von x_1 bis x_2) <u>gleichzeitig</u> betrachtet werden, und das ist in b) im System Σ' <u>nicht</u> gegeben. Berechnen Sie die entsprechende Korrektur; daraus ergibt sich tatsächlich eine Längenkontraktion.

d) Zeigen Sie, dass die gleichen Phänomene auch umgekehrt auftreten. Hierzu kehren Sie am besten die oben angegebene Transformation um (d. h. $ct = ...$ und $x = ...$).