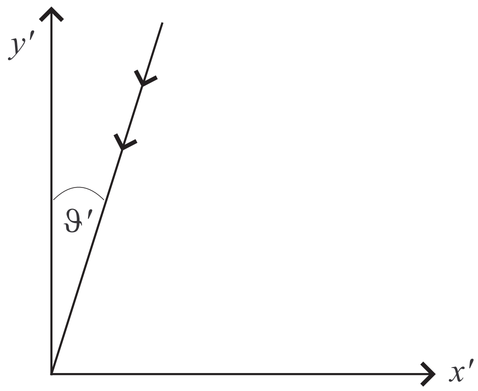
4. Übung Theoretische Ergänzungen zur Physik III (WS 2014/15) **Prof. Rohlfing**

Abgabedatum: 10.12.2014, 10:30, Briefkasten neben IG1 85 Besprechung: 15./16.12.2014

TE-Aufgabe 10: Abberation des Lichtes **(schriftlich, 8 Punkte)**

Bezüglich eines Inertialsystems IS$'$ kommt das Licht eines fernen Sterns aus einer Richtung, die in der x'-y'-Ebene liegt und mit der y'-Achse den Winkel ϑ' bildet (siehe Abbildung). Das Inertialsystems IS$'$ bewegt sich mit der Geschwindigkeit v relativ zum Inertialsystem IS in Richtung der x-Achse. Vom System IS aus betrachtet bilden die Lichtstrahlen einen Winkel ϑ mit der y-Achse.



a) Bestimmen Sie den Winkel ϑ im Rahmen der nichtrelativistischen Physik. Betrachten Sie dazu das Licht als einen Strom von Teilchen, die sich in IS$'$ mit Lichtgeschwindigkeit c bewegen.

b) Bestimmen Sie ϑ relativistisch im Teilchenbild. Benutzen Sie dafür die relativistischen Additionstheoreme für Geschwindigkeiten. Zeigen Sie, dass

$$\tan\vartheta = \gamma\left(\tan\vartheta' - \frac{\beta}{\cos\vartheta'}\right) \qquad \text{sowie} \qquad \sin\vartheta = \frac{\sin\vartheta' - \beta}{1 - \beta\sin\vartheta'}$$

gilt.

c) Zeigen Sie, dass im Fall $\vartheta' = 0$ die Beziehung $\sin\vartheta = -v/c$ gilt. Welches Ergebnis hätte man in a) nichtrelativistisch erhalten?

d) In der Astronomie wendet man die Formeln auf die Beobachtung von Sternenlicht an, indem man IS$'$ als Sonnensystem betrachtet und v die Bahngeschwindigkeit der Erde ist. Wie groß ist dann ϑ für den Fall $\vartheta' = 0$?

e) Bestimmen Sie den Winkel ϑ im Wellenbild des Lichtes. Betrachten Sie dazu in IS$'$ eine ebene Welle

$$\varphi(\vec{r}\,', t') = \exp\left\{i\,(k'_x\cdot x' + k'_y\cdot y' - \omega' t')\right\}$$

mit

$$k'_x = -k'\sin\vartheta'\,, \qquad k'_y = -k'\cos\vartheta'\,, \qquad \omega' = c\,k' \quad \text{mit} \quad k' = \sqrt{k'^2_x + k'^2_y}\,.$$

Wenden Sie die Lorentz-Transformation auf die Koordinaten x', y' und t' an und stellen Sie φ als $\varphi(\vec{r}, t)$ mit Wellenvektor (k_x, k_y) und Frequenz ω dar. Aus dem Verhältnis k_x/k_y erhalten Sie dann ϑ.

f) Überzeugen Sie sich, dass die Ergebnisse aus e) die Dispersionsrelation

$$\omega^2 = c^2\,(k_x^2 + k_y^2)$$

erfüllen.

TE-Aufgabe 11: Vierer-Vektoren und Tensoren (mündlich, 6 Punkte)

a) Sei $(T^{\mu\nu})$ ein kontravarianter Tensor. Zeigen Sie, dass $\Sigma_\mu T^{\mu\mu}$ nicht invariant unter Lorentz-Transformationen ist.

b) Sei $A^\mu B_\mu$ invariant für beliebige kontravariante Vierer-Vektoren (A^μ). Zeigen Sie, dass (B_μ) ein kovarianter Vektor ist.

c) Seien (A^μ) und (B^μ) kontravariante Vektoren. Zeigen Sie, dass $C^{\mu\nu} := A^\mu + B^\nu$ keinen kontravarianten Tensor definiert.

d) Sei $(F^{\mu\nu})$ ein antisymmetrischer kontravarianter Tensor: $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$. Zeigen Sie, dass $(F^{\mu\nu})$ antisymmetrisch in allen Inertialsystemen ist. Zeigen Sie, dass der zugehörige kovariante Tensor $(F_{\mu\nu})$ ebenfalls antisymmetrisch ist.

TE-Aufgabe 12: Ladungsdichte und Stromdichte (mündlich, 6 Punkte)

Betrachten Sie eine (zeitunabhängige) Ladungsdichte der Form

$$\rho\,(\vec{r},\,t) \;=\; \rho_0\,\mathrm{e}^{-\alpha\,(x^2+y^2+z^2)} \;.$$

a) Wie lautet die Vierer-Stromdichte $j^\mu\,(x^\nu)$?

b) Bestimmen Sie die Gesamtladung.

c) Zeigen Sie, dass $\partial_\mu\, j^\mu = 0$ gilt.

d) Transformieren Sie j^μ nun in ein Bezugssystem Σ', das sich mit Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegt, d. h. mit einer Lorentz-Transformation

$$t' = \gamma\, t - \frac{\gamma\, v}{c^2}\, x\;, \qquad x' = -\gamma\, v\, t + \gamma\, x$$

bzw.

$$t = \gamma\, t' + \frac{\gamma\, v}{c^2}\, x'\;, \qquad x = \gamma\, v\, t' + \gamma\, x'\;.$$

Hierzu bilden Sie zunächst $(j'^\mu) = \underline{\underline{L}} \cdot (j^\mu)$, und drücken Sie anschließend die Variablen x^ν durch x'^ν aus – somit erhalten Sie $j'^\mu\,(x'^\nu)$.

e) Zeigen Sie, dass in Σ' wieder $\partial'_\mu\, j'^\mu = 0$ gilt.

f) Zeigen Sie, dass die gleiche Gesamtladung wie in b) resultiert.

g) Skizzieren Sie die Ladungsdichte entlang der x-Achse in Σ, bzw. entlang der x'-Achse in Σ', zu $t = 0$ bzw. $t' = 0$ und zu einer späteren Zeit $t' > 0$.