

Aufgabe 14: Telegraphengleichung

(mündlich, 10 Punkte)

Die Ausbreitung eines zeitabhängigen Spannungssignals $U(x, t)$ auf Leitern wird durch die Telegraphengleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \tilde{L} \tilde{C} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (\tilde{R} \tilde{C} + \tilde{L} \tilde{G}) \frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{R} \tilde{G} U$$

beschrieben. Hierbei sind \tilde{C} , \tilde{L} und \tilde{R} die Kapazität, die Induktivität und der Widerstand pro Länge der Leiter und \tilde{G} der Leitwert pro Länge zwischen den Leitern.

- a) Führen Sie die Telegraphengleichung mit Hilfe des Ansatzes $U(x, t) = U(x) e^{i\omega t}$ in eine zeitunabhängige gewöhnliche Differentialgleichung über. Lösen Sie die zeitunabhängige Differentialgleichung mit dem Ansatz $U(x) = U_0 e^{-i\gamma x}$.

- b) Zeigen Sie, dass sich γ in einen Real- und einen Imaginärteil aufspalten lässt $\gamma = k - i\kappa$ mit

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{(\omega^2 \tilde{L} \tilde{C} - \tilde{R} \tilde{G})^2 + \omega^2 (\tilde{R} \tilde{C} + \tilde{L} \tilde{G})^2} + (\omega^2 \tilde{L} \tilde{C} - \tilde{R} \tilde{G}) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

und

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{(\omega^2 \tilde{L} \tilde{C} - \tilde{R} \tilde{G})^2 + \omega^2 (\tilde{R} \tilde{C} + \tilde{L} \tilde{G})^2} - (\omega^2 \tilde{L} \tilde{C} - \tilde{R} \tilde{G}) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

- c) Zeigen Sie, dass für einen sehr kleinen Leitwert \tilde{G} ($\tilde{G} \ll \omega \tilde{C}$ und $\tilde{R} \tilde{G} \ll \omega^2 \tilde{L} \tilde{C}$) die Dämpfung näherungsweise durch

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\omega^4 \tilde{L}^2 \tilde{C}^2 + \omega^2 (\tilde{R} \tilde{C} + \tilde{L} \tilde{G})^2} - \omega^2 \tilde{L} \tilde{C} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

gegeben ist. Für welche Induktivität \tilde{L} wird in diesem Fall die Dämpfung minimal?

- d) Entwickeln Sie für den Spezialfall $\tilde{G} = 0$ den Dämpfungsterm κ für die Grenzfälle $\tilde{R} \ll \omega \tilde{L}$ und $\tilde{R} \gg \omega \tilde{L}$ bis zum jeweils führenden Glied.

Hinweis:

$$\sqrt{a^2 + x^2} - x \approx \frac{a^2}{2x} \quad (x \gg a); \quad \sqrt{a^2 + x^2} - x \approx a \quad (x \ll a).$$

- e) Welche der beiden Näherungen gilt

- i) für eine Telefonleitung mit

$$\omega = 5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}, \quad \tilde{C} = 22 \text{ pF/m}, \quad \tilde{L} = 500 \text{ nH/m}, \quad \tilde{R} = 60 \text{ m}\Omega/\text{m},$$

- ii) für eine Hochspannungsleitung

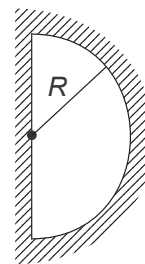
$$\omega = 314 \text{ s}^{-1}, \quad \tilde{C} = 4,4 \text{ pF/m}, \quad \tilde{L} = 2,5 \mu\text{H/m}, \quad \tilde{R} = 25 \mu\Omega/\text{m}.$$

Wie groß ist jeweils die Abklinglänge $1/\kappa$? Wie lang darf die Hochspannungsleitung höchstens sein, wenn die Spannung um maximal 5% abfallen darf?

Aufgabe 15: Halbe Kreismembran

(schriftlich, 6 Punkte)

Eine halbe Kreismembran mit Radius R (siehe Abbildung) ist am Rand fest eingespannt.



- a) Geben Sie die Randbedingungen für die Auslenkungen $u(r, \varphi, t)$ an.
- b) Zeigen Sie, dass eine Funktion der Form

$$u(\rho, \varphi, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} J_{|m|}(k_{|m|,l} \cdot \rho) e^{im\varphi} (A_{m,l} \cos(\omega_{|m|,l} t) + B_{m,l} \sin(\omega_{|m|,l} t))$$

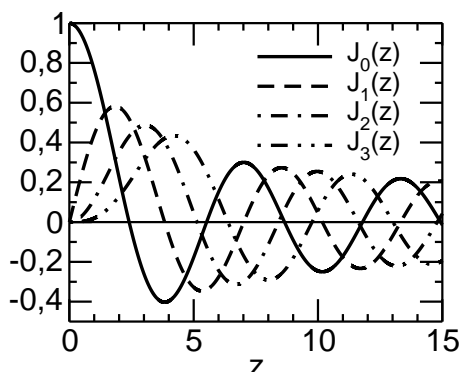
auch als

$$u(\rho, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} J_m(k_{m,l} \cdot \rho) (a_{m,l} \cos(m\varphi) + b_{m,l} \sin(m\varphi)) (\tilde{A}_{m,l} \cos(\omega_{m,l} t) + \tilde{B}_{m,l} \sin \omega_{m,l} t)$$

geschrieben werden kann.

- c) Bestimmen Sie – ausgehend von den in b) gegebenen Schwingungsmoden – die Eigenfrequenzen $\omega_{m,l}$ dieser Membran. Geben Sie die vier niedrigsten Eigenfrequenzen explizit an.

Hinweis: Verlauf und Nullstellen einiger Besselfunktionen:



$z_{m,l}$	$J_0(z)$	$J_1(z)$	$J_2(z)$	$J_3(z)$	$J_4(z)$
$l = 1$	2,405	3,832	5,136	6,380	7,588
$l = 2$	5,520	7,016	8,417	9,761	11,064
$l = 3$	8,654	10,173	11,620	13,015	14,373
$l = 4$	11,792	13,323	14,796	16,224	17,616
...

Aufgabe 16: Gedämpfte Saite

(schriftlich, 4 Punkte)

Die Auslenkungen einer Saite werden durch Energieabgabe an das umgebende Medium und durch dissipative Prozesse beim Biegen der Saite gedämpft. In einfachster Näherung kann man diese Dämpfung durch eine geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft beschreiben. Dies führt (mit einer Konstante γ) auf eine Wellengleichung der Form

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0 .$$

Lösen Sie diese Wellengleichung unter Verwendung eines Separationsansatzes der Form $u(x, t) = f(x) \cdot g(t)$ für eine Saite, die bei $x = 0$ und $x = l$ fest eingespannt ist. Zeigen Sie, dass die gedämpften Eigenschwingungen die Form

$$u_n(x, t) = \sin(k_n x) (a_n \sin(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t)) e^{-\frac{\gamma}{2} t}$$

haben. Wie hängt dabei ω_n von n und γ ab?

Hinweis: Wählen Sie die bei der Separation auftretende Konstante zu $\lambda = -k^2$ mit k reell.