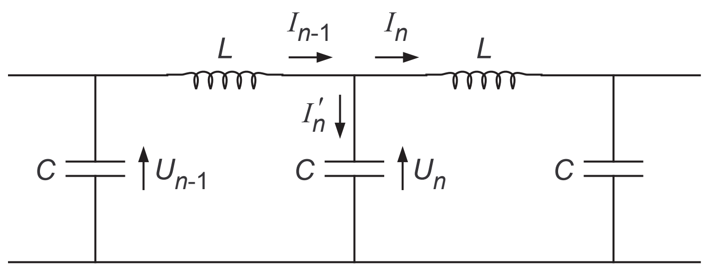
5. Übung zur Physik III (WS 2014/15) — **Prof. Kohl/Prof. Rohlfing**

Ausgabedatum: 12.11.2014 — Abgabedatum: 19.11.2014, 10:30 Uhr, Briefkasten neben IG 1-85

Aufgabe 17: Lineare Kette von LC-Gliedern **(mündlich, 4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass in der skizzierten Anordnung elektrische Wechselströme ungedämpft fließen können, wenn ihre Frequenz kleiner als $\omega_{\max} = 2/\sqrt{L\,C}$ ist.

Stellen Sie dazu durch Betrachtung der Ströme und Spannungen eine Differentialgleichung für die Spannung U_n auf und lösen Sie diese durch den Ansatz $U_n = u_0\,\mathrm{e}^{i\,k\,n}\,\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t}$, der analog zum Ausdruck für eine Welle längs der x-Achse $u\,(x,\,t) = A\,\mathrm{e}^{i\,k\,x}\,\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t}$ gebildet ist. Dabei ist k die Phasendifferenz von Strom oder Spannung zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern.



Aufgabe 18: Wellenpaket **(schriftlich, 5 Punkte)**

Ein eindimensionales Wellenpaket sei gegeben durch

$$f\,(x,\,t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A\,(k)\,\mathrm{e}^{i\,(k\,x-\omega\,(k)\,t)}\,d\,k \qquad \text{mit} \qquad A\,(k) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\,\sigma^2}}\;.$$

Dieses Wellenpaket breite sich in einem dispersiven Medium mit der Dispersionsrelation

$$\omega\,(k) \;=\; \omega_0 + a\,(k\,-\,k_0) \;+\; \frac{b}{2}\,(k\,-\,k_0)^2$$

aus.

a) Berechnen Sie $f\,(x,\,t)$.

   Hinweis: Es ist nützlich, die Abkürzung $h^2 = 1/\sigma^2 + i\,b\,t$ zu verwenden.

b) Berechnen Sie $|f\,(x,\,t)|$. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das Maximum von $|f\,(x,\,t)|$?

c) Die Breite des Wellenpaketes sei durch den Abfall der Amplitude von $|f\,(x,\,t)|$ auf $1/\mathrm{e}$ des maximalen Wertes definiert. Berechnen Sie die Breite als Funktion der Zeit.

Aufgabe 19: Lineare Sendeantenne/elektrischer Dipol (mündlich, 4 Punkte)

a) Betrachten Sie einen zeitlich veränderlichen elektrischen Dipol $\vec{p}(t)$ in einem räumlich begrenzten Gebiet (maximale Abmessung d um den Koordinatenursprung herum). Zeigen Sie, dass daraus für $r \gg d$ ein Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},\, t) \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{d}{d\,t} \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ resultiert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst (ähnlich wie in der Vorlesung), dass $\int\limits_{\mathbb{R}^3} \vec{j}(\vec{r}\,',\, t)\, d^3 r' = \frac{d}{d\,t} \vec{p}(t)$ gilt.

b) Berechnen Sie $\vec{A}(\vec{r},\, t)$ für das einfache Modell einer linearen Antenne (Länge l) mit der Stromverteilung

$$\vec{j}(\vec{r},\, t) = \begin{cases} I_0\, \delta(x)\, \delta(y) \left(1 - \frac{|z|}{l} \cdot 2\right) \cos(\omega\, t)\, \vec{e}_z & \text{für} \quad -\frac{l}{2} \le z \le \frac{l}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

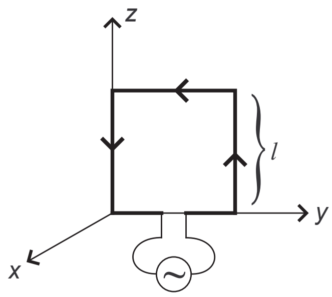
Berechnen Sie daraus das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r},\, t)$ im Fernfeld.

Aufgabe 20: Magnetische Dipolstrahlung (schriftlich, 5 Punkte)

Eine quadratische Leiterschleife (Kantenlänge l), die in der y-z-Ebene liegt, werde von einem Wechselstrom

$$I(t) = I_0 \cos(\omega\, t)$$

durchflossen. Der Strom in den Zuleitungen soll bei den folgenden Betrachtungen vernachlässigt werden.



a) Geben Sie die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},\, t)$ an.

b) Berechnen Sie das elektrische Dipolmoment $\vec{p}(t)$ und das magnetische Dipolmoment $\vec{m}(t)$.

c) Zeigen Sie, dass aus einem räumlich begrenzten magnetischen Moment $\vec{m}(t)$ (am Koordinatenursprung) bei großem Abstand r ein Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},\, t) \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r\,c} \frac{d}{d\,t} \vec{m}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \vec{e}_r$ resultiert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$\vec{j}\left(\vec{r}\,',\, t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}\right) \approx \vec{j}\left(\vec{r}\,',\, t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial\, t} \vec{j}\left(\vec{r}\,',\, t - \frac{r}{c}\right) \cdot \frac{(\vec{r}\,\vec{r}\,')}{r\,c}$$

gilt. Bei Abwesenheit elektrischer Quadrupolanteile ($\rightarrow$ hier gegeben) können Sie dann $\vec{j} \cdot (\vec{r}\,\vec{r}\,')$ durch $\frac{1}{2}(\vec{r}\,' \times \vec{j}) \times \vec{r}$ ersetzen.

d) Bestimmen Sie das Fernfeld-Verhalten des Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r},\, t)$, das sich aus dem magnetischen Dipolmoment ergibt. Gibt es im vorliegenden Fall auch elektrische Dipolstrahlung?

e) Geben Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ der Dipolstrahlung in der Fernzone an.

Aufgabe 21: Kugelwelle (mündlich, 2 Punkte)

Zeigen Sie, dass $u(\vec{r},\, t) = u_0 \frac{1}{r} e^{i\,k\,(r - c\,t)}$ die Wellengleichung in drei Dimensionen erfüllt.