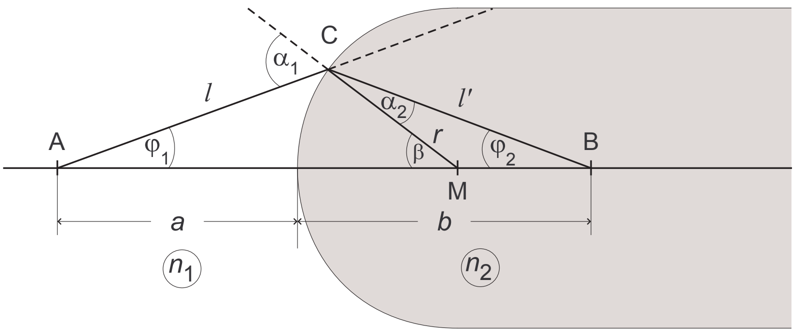
9. Übung zur Physik III (WS 2014/15) **Prof. Kohl/Prof. Rohlfing**

Ausgabedatum: 10.12.2014 Abgabedatum: 17.12.2014, 10:30 Uhr, Briefkasten neben IG 1-85

Hinweis: Bitte denken Sie an die Anmeldung zur Vorlesung und Übung zur Physik III im QISPOS. Die Anmeldephase endet am 15. Dezember 2014!

Aufgabe 32: Brechung durch Kugelfläche (mündlich, 7 Punkte)

Ermitteln Sie die Linsengleichung für die Abbildung durch eine sphärische Fläche für achsennahe Strahlen, d. h. kleine Winkel φ_1, φ_2, β, α_1, α_2.



Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

a) Zeigen Sie zunächst auf *zwei verschiedene* Arten, dass folgende Gleichung gilt:

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r} \, .$$

i) Leiten Sie mit Hilfe geometrischer Überlegungen im Dreieck AMC bzw. BMC, dem Brechungsgesetz und zum Schluss der Näherung $l \approx a$ und $l' \approx b$ obige Relation ab.

ii) Berechnen Sie mit Hilfe des Kosinussatzes im Dreieck AMC bzw. BMC die Längen l bzw. l' als Funktion des Winkels β. Minimalisieren Sie dann die optische Weglänge $n_1 l + n_2 l'$ (Fermat'sches Prinzip) bezüglich β. Was ergibt sich für l und l' für kleine β? Setzen Sie diese Resultate ein, um obige Relation zu erhalten.

b) Berechnen Sie dann die Brennweiten f_1 und f_2, indem Sie parallel einfallendes Licht, d. h. $b \to \infty$ bzw. $a \to \infty$, betrachten. Zeigen Sie, dass gilt:

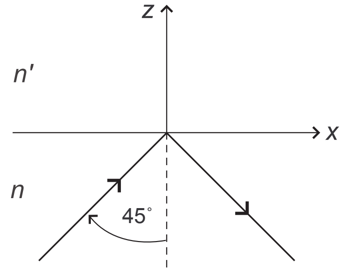
$$\frac{f_1}{a} + \frac{f_2}{b} = 1 \, .$$

Aufgabe 33: Totalreflexion (schriftlich, 6 Punkte)

Eine ebene Welle

$$\vec{E}\,(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\left(\vec{E}_0\, e^{i\,(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right) \qquad \text{mit} \qquad \vec{E}_0 = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\,(-1,\, 0,\, 1)$$

trifft unter einem Winkel von 45° auf die Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes $n = 1{,}5$ und $n' = 1$. Dabei tritt eine Totalreflexion der Welle auf.



a) Geben Sie die Amplitude $\tilde{\vec{E}}_0$ der reflektierten Welle an. Berechnen Sie

$$\tilde{\vec{E}}\,(\vec{r},\,t) \;=\; \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}_0\,\mathrm{e}^{i\,(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\,t)}\right)\ .$$

b) Zeigen Sie, dass die transmittierte Welle die Form

$$\vec{E}\,'\,(\vec{r},\,t) \;=\; \mathrm{Re}\left(\vec{E}_0'\,\mathrm{e}^{i\,(k'\,\sin\varphi'\cdot x-\omega\,t)}\,\mathrm{e}^{-\frac{z}{\beta}}\right)$$

hat. Berechnen Sie β für die Frequenz $\omega \;=\; 2\,\pi\,\cdot\,5\,\cdot\,10^{14}\,\dfrac{1}{s}$.

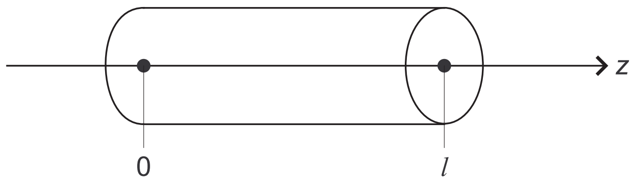
Hinweis: Verwenden Sie die bei der Diskussion der Fresnel-Formeln in der Vorlesung hergeleiteten Ergebnisse für eine einfallende ebene Welle der Form $\vec{E}_0\,\mathrm{e}^{i\,(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\,t)}$.

Aufgabe 34: Ungewöhnliche Sammellinse (schriftlich, 7 Punkte)

Ein achsenparalleler Lichtstrahl fällt von links ($z\;<\;0$) aus Luft ($n\;=\;1$) am Punkt $(x_0,\,0,\,0)$ auf einen Glaszylinder der Länge l, dessen Brechzahl $n\,(\rho)$ quadratisch vom Achsenabstand gemäß

$$n\,(\rho) \;=\; n_0\left(1-\frac{k^2}{2}\,\rho^2\right)$$

abhängt.



a) Zeigen Sie, dass der Strahl im Zylinder einen Weg $(x\,(z),\,y\,(z),\,z)$ zurücklegt, der den Lichtweg $\displaystyle\int n\,d\,s$ dadurch minimiert, dass er

$$n\,(\rho)\,x''\,(z)\;+\;k^2\,n_0\,x\,(z)\;\approx\;0 \qquad \text{und} \qquad n\,(\rho)\,y''\,(z)\;+\;k^2\,n_0\,y\,(z)\;\approx\;0$$

erfüllt. Nehmen Sie hierbei an, dass x' und y' klein sind.

b) Bestimmen Sie $x\,(z)$ und $y\,(z)$ für den oben angegebenen achsenparallelen Lichtstrahl. Nähern Sie ab jetzt $n\,(\rho)\;\approx\;n_0$.

c) Skizzieren Sie den Strahlverlauf für die Fälle $k\,l\;=\;1$, $k\,l\;=\;\pi$ und $k\,l\;=\;5$.

d) Nun sei $l\;<\;\dfrac{\pi}{2\,k}$. Bestimmen Sie die Position z_F, an der der Strahl nach Durchlaufen des Zylinders die Mittelachse trifft, und zeigen Sie, dass z_F nicht von x_0 abhängt.

e) Aufgrund der obigen Ergebnisse wirkt der Glaszylinder offenbar als Sammellinse. Berechnen Sie die Lage des Brennpunktes F, die Brennweite f und die Lage der Hauptebene H als Funktion des Parameters $k\,l$.