Aufgabe 1 (mündlich): Impulsdarstellung (10 Punkte)
Die eindimensionale, zeitunabhängige Schrödingergleichung lautet in Impulsdarstellung

$$\frac{p^2}{2m}\,\widetilde{\psi}(p) + \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{V}\left(p-p'\right)\,\widetilde{\psi}\left(p'\right)\,\mathrm{d}p' = E\,\widetilde{\psi}(p)\ .$$

Dabei ist

$$\widetilde{V}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} V(x)e^{-\frac{i}{\hbar}px}\,\mathrm{d}x$$

die Fouriertransformierte des Potentials. Gesucht ist der gebundene Zustand (d.h. $E<0$) im Potential $V(x) = -\beta\delta(x)$.

a) Wie lautet $\widetilde{V}(p)$ und die dazugehörige zeitunabhängige Schrödingergleichung?

b) Unter der Annahme $E<0$ erhalten Sie durch geeignete Integration über die Wellenfunktion eine Lösbarkeitsbedingung. Wie lautet der daraus folgende Energie-Eigenwert?
Hinweis: Das Ergebnis eines bestimmten Integrals ist eine Zahl.

c) Berechnen Sie die normierte Wellenfunktion im Impulsraum $\widetilde{\psi}(p)$.

d) Berechnen Sie daraus die Wellenfunktion im Ortsraum.

Die Grundlagen zu den Aufgaben 2 und 3 finden Sie im Skript zur Quantenphysik in Kapitel 8 – 10.

Aufgabe 2 (schriftlich): Bell-Messung (3 Bonus Punkte)
Zwei Spin-1/2-Teilchen a und b befinden sich im verschränkten Zustand

$$|\psi\rangle = \alpha\,|\uparrow\rangle_a\,|\uparrow\rangle_b + \beta\,|\uparrow\rangle_a\,|\downarrow\rangle_b + \gamma\,|\downarrow\rangle_a\,|\uparrow\rangle_b + \delta\,|\downarrow\rangle_a\,|\downarrow\rangle_b$$

mit $|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2+|\delta|^2 = 1$.

a) Die z-Komponente jedes Spins wird gemessen. Wie lauten die möglichen Messergebnisse und mit welchen Wahrscheinlichkeiten werden sie gemessen?

b) Statt der z-Komponenten werden nun Messungen durchgeführt, die den Spin-Zustand der beiden Teilchen auf einen der vier Bell-Zustände

$$|\Psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\uparrow\rangle_a\,|\uparrow\rangle_b + |\downarrow\rangle_a\,|\downarrow\rangle_b\,\big) \quad , \quad |\Phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\uparrow\rangle_a\,|\downarrow\rangle_b + |\downarrow\rangle_a\,|\uparrow\rangle_b\,\big)$$
$$|\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\uparrow\rangle_a\,|\uparrow\rangle_b - |\downarrow\rangle_a\,|\downarrow\rangle_b\,\big) \quad , \quad |\Phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\uparrow\rangle_a\,|\downarrow\rangle_b - |\downarrow\rangle_a\,|\uparrow\rangle_b\,\big)$$

projiziert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird jeder Bell-Zustand gemessen? Zeigen Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten zu Eins summieren.
Hinweis: Die Bell-Zustände bilden eine Basis.

Aufgabe 3 (schriftlich): Quantenteleportation eines Spin-Zustands (7 Bonus Punkte)

Alice hat ein Spin-1/2-Teilchen A im Zustand

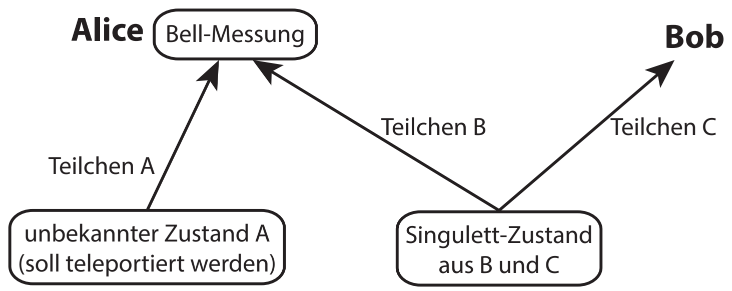
$$|\psi\rangle_A = \alpha\,|\uparrow\rangle_a + \beta\,|\downarrow\rangle_a\,, \qquad \text{mit } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,$$

präpariert, den sie zu Bob teleportieren möchte.

Außerdem haben Alice und Bob ein Paar von Spin-1/2-Teilchen B und C im Singulett-Zustand

$$|\psi\rangle_{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\uparrow\rangle_b\,|\downarrow\rangle_c - |\downarrow\rangle_b\,|\uparrow\rangle_c\,\big)$$

präpariert.



a) Wie im Bild dargestellt führt nun Alice am Zustand von AB eine Messung durch, die diesen auf einen der vier Bell-Zustände aus Aufgabe 2 projiziert. Wie lauten die Wahrscheinlichkeiten für die vier möglichen Ergebnisse?
Bestimmen Sie dazu zunächst den Spin-Zustand $|\psi\rangle_{ABC}$ aller drei Teilchen A, B und C. $|\psi\rangle_{ABC}$ lässt sich im nächsten Schritt als Produktzustand aus den Bell-Zuständen aus A und B (siehe Aufgabe 2) und Linearkombinationen der Spin-Zustände $|\uparrow\rangle_c$ und $|\downarrow\rangle_c$ des Teilchens C darstellen.

b) Nehmen Sie an, dass Alice das Paar AB im Zustand $|\Phi_-\rangle$ findet. In welchem Spin-Zustand befindet sich Teilchen C nach dieser Messung?

c) Leiten Sie aus den vorherigen Aufgabenteilen das Prinzip der Quanten-Teleportation her.

d) Kann dieses Prinzip genutzt werden um Informationen schneller von Alice zu Bob zu übertragen als über einen klassischen Weg (also schneller als mit Lichtgeschwindigkeit)?