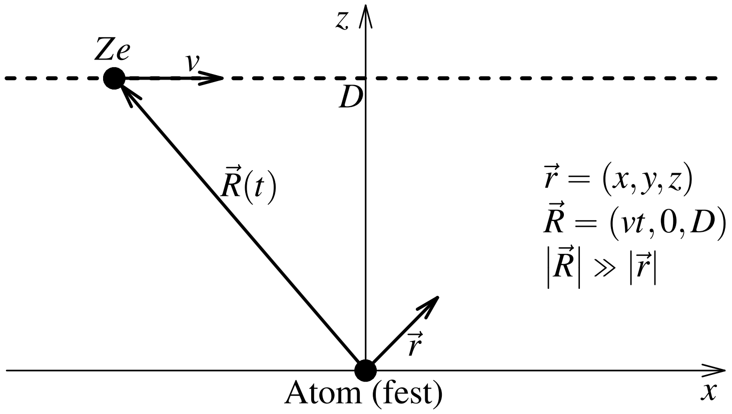
Aufgabe 27 (schriftlich): Stoßanregung (10 Punkte)

Ein schweres Teilchen der Ladung Ze fliegt mit der Geschwindigkeit v an einem Wasserstoffatom vorbei.



a) Bestimmen Sie mit Hilfe der zeitabhängigen Störungstheorie erster Ordnung die Wahrscheinlichkeit, dass das Elektron in einen angeregten Zustand übergeht. Entwickeln Sie dazu die Störung

$$H_1(t) = -\frac{Z\,e^2}{4\,\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{R}(t) - \vec{r}\right|}$$

für $\left|\vec{R}\,\right| \gg |\vec{r}\,|$ bis zur ersten Ordnung in r.

Hinweis: Laut Vorlesung gilt allgemein für die Übergangswahrscheinlichkeit:

$$P_{fi}(t) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{i\omega_{fi}t'} H_{1\,fi}(t')\,\mathrm{d}t'\right|^2$$

b) Diskutieren sie folgende Grenzfälle:

(i) $T = \frac{D}{v} \gg \frac{1}{\omega_{fi}}$

(ii) $T \ll \frac{1}{\omega_{fi}}$

und geben Sie die Auswahlregeln für die möglichen Übergänge an.

Hinweis: Vergleichen Sie die Zeitabhängigkeiten von $H_{1\,fi}(t)$ und der Exponentialfunktion im Integranden.

c) Berechnen Sie für den Fall **(ii)** explizit die Übergangswahrscheinlichkeit vom $1s$-Grundzustand in den ersten angeregten Zustand mit $n = 2$. Verwenden Sie die folgende Wellenfunktion.

$$\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi) = R_{nl}(r)\,Y_l^m(\vartheta,\varphi) \qquad \text{mit}$$

$$R_{10}(r) = 2\,a_\mathrm{B}^{-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{r}{a_\mathrm{B}}\right)\ , \qquad R_{20}(r) = (2a_\mathrm{B})^{-\frac{3}{2}}\left(2 - \frac{r}{a_\mathrm{B}}\right)\exp\left(-\frac{r}{2a_\mathrm{B}}\right)\ ,$$

$$R_{21}(r) = (2a_\mathrm{B})^{-\frac{3}{2}}\frac{r}{\sqrt{3}\,a_\mathrm{B}}\exp\left(-\frac{r}{2a_\mathrm{B}}\right)\ ,$$

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\,\pi}}\ , \qquad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\,\pi}}\,\cos(\vartheta)$$

und dem Bohrradius $a_\mathrm{B} = \frac{4\,\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$.

Aufgabe 28 (mündlich): Adiabatische Näherung der Spinresonanz (4 Punkte)

Im vergangenen Semester (Kap. 7.4) wurde die Spindynamik in einem oszillierenden Magnetfeld der Form

$$\vec{B}(t) = B\big[\sin(\vartheta)\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\vartheta)\sin(\omega t)\vec{e}_y + \cos(\vartheta)\vec{e}_z\big]$$

analytisch berechnet. Dabei ist ϑ der Winkel zwischen z-Achse und Magnetfeld. Hier soll die analytische Lösung mit der Lösung in adiabatischer Näherung aus Kapitel 17.4.1 verglichen werden.
Dazu wählen wir als Anfangszustand den adiabatischen Eigenzustand

$$|\psi(0)\rangle = |\varphi_+(0)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die exakte Lösung zu

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \left[\cos(\Omega t) - i\frac{\omega_\mathrm{B}-\omega}{2\Omega}\sin(\Omega t)\right]\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)e^{-i\omega t/2} \\ \left[\cos(\Omega t) - i\frac{\omega_\mathrm{B}+\omega}{2\Omega}\sin(\Omega t)\right]\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)e^{+i\omega t/2} \end{pmatrix} ,$$

mit

$$\omega_\mathrm{B} = \frac{g\mu_\mathrm{B}B}{\hbar} \quad \text{und} \quad \Omega = \frac{1}{2}\sqrt{\omega^2 + \omega_\mathrm{B}^2 - 2\omega\omega_\mathrm{B}\cos(\vartheta)} \,.$$

a) Stellen Sie die Wellenfunktion $|\psi(t)\rangle$ als Linearkombination der beiden adiabatischen Eigenzustände

$$|\varphi_+(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)e^{i\omega t} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\varphi_-(t)\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)e^{-i\omega t} \\ \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

dar.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich der Spin im Zustand $|\varphi_-(t)\rangle$?

c) Zeigen Sie, dass im Grenzfall sehr langsamer Dynamik des Hamiltonoperators ($\omega \to 0$) die adiabatische Lösung exakt wird, der Spin also im Zustand $|\varphi_+(t)\rangle$ bleibt.

Aufgabe 29 (mündlich): Verbreiterung eines harmonischen Oszillators (7 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m_0 befinde sich im eindimensionalen Potential eines harmonischen Oszillators (HO) der Frequenz ω im Grundzustand $|\varphi_0\rangle$.
Die Frequenz des HO werde nun instantan auf $\omega/2$ verkleinert. Nehmen Sie an, dass sich die Wellenfunktion während der Frequenzabsenkung nicht ändert.

a) Es wird nun die Energie des Teilchens gemessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man welchen Wert?
Hinweis: Folgende Eigenschaft der Hermite-Polynome $H_n(x)$ kann hilfreich sein:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) H_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \sqrt{a}2^n(a-1)^{n/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) & \textit{für } n \textit{ gerade} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} ,$$

mit: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$, $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$, $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{105\sqrt{\pi}}{16}$

b) Was ist der Energieerwartungswert $\langle E\rangle$?
Hinweis: Wenn Sie eine unendliche Reihe erhalten, sollten Sie einen anderen Weg versuchen.

Nun soll sich die Frequenz sehr langsam (adiabatisch) von ω bis $\omega/2$ ändern.

c) Welche Energien misst man nun mit welchen Wahrscheinlichkeiten nachdem $\omega/2$ erreicht wurde?

d) Wie lautet der Energieerwartungswert $\langle E\rangle$?

e) Berechnen Sie die geometrische Phase für die Frequenzänderung.