Aufgabe 32 (schriftlich): s-Wellen-Streuung an Kugelschale (10 Punkte)
Eine ebene Welle soll an einem kugelsymmetrischen Potential der Form

$$V(\vec{r}) = -C\delta(r-a) \qquad \text{mit} \quad C, a > 0$$

gestreut werden. Wir wollen nur den Fall der s-Wellen-Streuung betrachten, es gilt also immer $l = 0$.

a) Wie lautet die Radialgleichung in diesem Fall?

b) Durch die Substitution $u(r) = rR_0(r)$ lässt sich die Radialgleichung vereinfachen. Wie lautet die Differentialgleichung für $u(r)$?

c) Welche Rand- und Anschlussbedingungen müssen $R_0(r)$ und $u(r)$ bei $r = 0$ und $r = a$ erfüllen?
Hinweis: Das Potential im Ursprung ist Null. Was bedeutet das für $R_0(0)$ und damit für $u(0)$?

d) Zeigen Sie, dass der Ansatz

$$R_0(r) = \begin{cases} Ah_0^{(-)}(kr) + Bh_0^{(+)}(kr) & \text{für} \quad r < a \\ h_0^{(-)}(kr) + e^{i2\delta_0}h_0^{(+)}(kr) & \text{für} \quad r > a \end{cases} \qquad \text{mit} \quad E = \frac{\hbar k^2}{2m_0}$$

die Differentialgleichung aus **b)** löst. Dabei sind

$$h_l^{(\pm)} = \mp i(-x)^l \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l \frac{e^{\pm ix}}{x}$$

die sphärischen Hankelfunktionen.
Bestimmen Sie A und B aus den Rand- und Anschlussbedingungen für $u(r)$.

e) Berechnen Sie die Streuphase δ_0 aus der Sprungbedingung für $\mathrm{d}u/\mathrm{d}r$ und daraus den Streuquerschnitt

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2(\delta_0)$$

im Grenzfall der Streuung langsamer Teilchen ($ka \ll 1$).

Aufgabe 33 (mündlich): N-Fermion-System (10 Punkte)
N spinlose Fermionen (oder Fermionen, deren Spins parallel ausgerichtet sind) der Masse m_0 befinden sich im Potential eines harmonischen Oszillators

$$V = \frac{1}{2}m_0\omega^2\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \ .$$

a) Wie lauten die Vielteilchen-Wellenfunktionen $\psi_{\alpha_1\ldots\alpha_N}(x_1,\ldots,x_N)$ ausgedrückt durch die Einteilchen-Wellenfunktionen $\varphi_{\alpha_n}(x_n)$ und die Energien $E = \sum_{i=1}^{N} E_i$ der Zustände mit den drei niedrigsten Energien. Welchen Entartungsgrad haben sie?

b) Welche Fermi-Energie hat das System?

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\left\langle \sum_{i=0}^{N} x_i^2 \right\rangle$.
Hinweis: Nutzen Sie die Tatsache, dass in einem harmonischen Oszillatorpotential die Erwartungswerte der kinetischen und der potentiellen Energie gleich sind, d.h. $\langle T\rangle = \langle V\rangle = \langle H\rangle/2$.