Aufgabe 4 (mündlich): Kommutatoren und Erwartungswerte im Heisenbergbild (4 Punkte)
Geht man in der Darstellung vom Schrödingerbild ins Heisenbergbild über, so werden die Operatoren zeitabhängig. Diese Zeitabhängigkeit wird bestimmt durch die Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[A, H] \ ,$$

wobei A einen beliebigen, nicht explizit zeitabhängigen Operator darstellt und H den Hamiltonoperator. Im Schrödingerbild gilt bekanntlich für Ortsoperator R und Impulsoperator P

$$[R_i, P_j] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij} \quad \text{und} \quad [R_i, R_j] = [P_i, P_j] = 0 \ ,$$

was im Heisenbergbild i.A. nur dann zutrifft, wenn beide Operatoren zum selben Zeitpunkt genommen werden. In dieser Aufgabe soll am Beispiel freier Teilchen untersucht werden, wie sich diese Kommutatoren ändern, wenn die Operatoren zu verschiedenen Zeiten genommen werden.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Orts- und den Impulsoperator eines freien Teilchens im Heisenbergbild auf. Wie lautet deren Lösung?
Hinweis: Sie können die Operatorrelationen aus Aufgabe 14 aus dem letzten Semester verwenden.

b) Berechnen Sie die Kommutatoren $[R_i(t), R_j(0)]$, $[R_i(t), P_j(0)]$, $[P_i(t), R_j(0)]$ und $[P_i(t), P_j(0)]$.

c) Berechnen Sie die quadratischen Unschärfen $(\Delta R_i)^2 = \langle R_i^2 \rangle - \langle R_i \rangle^2$ und $(\Delta P_i)^2 = \langle P_i^2 \rangle - \langle P_i \rangle^2$ als Funktion der Zeit in Abhängigkeit der Erwartungswerte zum Zeitpunkt $t = 0$.

Aufgabe 5 (a) – c) schriftlich): Getriebener harmonischer Oszillator (10 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m und Ladung q, das sich im Potential eines harmonischen Oszillators bewegt. Zusätzlich befinde sich das Teilchen in einem räumlich homogenen, zeitabhängigen elektrischen Feld $E(t)$. Der Hamiltonoperator für dieses System lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - qE(t)x \ .$$

Für $t < 0$ sei $E(t) = 0$ und das Teilchen befinde sich im Grundzustand $|0\rangle$ des harmonischen Oszillators.

a) Gesucht ist die Lösung der Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für die Operatoren $x(t)$ und $p(t)$. Führen Sie dazu die Operatoren a und $a^\dagger$ ein mit

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2m\omega\hbar}} p \quad , \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2m\omega\hbar}} p \ .$$

Drücken Sie den Hamiltonoperator durch a und $a^\dagger$ aus und stellen Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für diese Operatoren auf. Lösen Sie diese Bewegungsgleichungen mit der Anfangsbedingung, dass die Operatoren zur Zeit $t = 0$ mit den Schrödinger-Operatoren a_0 und $a_0^\dagger$ übereinstimmen und bestimmen Sie damit $x(t)$ und $p(t)$ in Abhängigkeit von den Schrödinger-Operatoren $x(0) = x_0$ und $p(0) = p_0$.
Hinweis: Verwenden Sie für die spezielle Lösung der BWG den Ansatz: $a(t) = \tilde{a}(t)e^{-i\omega t}$

b) Berechnen Sie den Orts- und Impulserwartungswert als Funktion der Zeit und zeigen Sie explizit, dass das Ehrenfestsche Theorem erfüllt ist.
Hinweis:

$$\textit{Mit} \quad F(t) = \int_0^t f(t,t')\,\mathrm{d}t' \qquad \textit{gilt} \qquad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = f(t,t) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' \ .$$

c) Berechnen Sie die zeitabhängigen Erwartungswerte der Operatoren a und $a^\dagger$ und zeigen Sie, dass diese schwankungsfrei sind, in dem Sinne, dass gilt

$$\left\langle 0 \,\middle|\, \left(a^\dagger - \left\langle a^\dagger \right\rangle\right) \left(a - \langle a \rangle\right) \,\middle|\, 0 \right\rangle = 0$$

Ab hier mündlich! (6 Punkte)

d) Gesucht ist im Folgenden der zeitabhängige Schrödinger-Zustand $|\psi(t)\rangle = U(t,0)\,|0\rangle$. Zeigen Sie, dass aus der Schwankungsfreiheit im Sinne von Teilaufgaben **c)** gefolgert werden kann, dass $|\psi(t)\rangle \equiv |\alpha(t)\rangle$ ein kohärenter Zustand ist, welcher durch die Eigenwertgleichung

$$a\,|\alpha(t)\rangle = \alpha(t)\,|\alpha(t)\rangle$$

mit $\alpha(t) = \langle 0|\, \alpha(t)\, |0\rangle$ definiert ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Norm des Zustands

$$|\varphi(t)\rangle = (a_0 - \alpha(t))\,|\psi(t)\rangle$$

verschwindet.

e) Bestimmen Sie $|\alpha(t)\rangle$ als Linearkombination der Energie-Eigenzustände $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators und zeigen Sie durch Einsetzen, dass die zeitabhängige Schrödingergleichung für diesen Zustand erfüllt ist.