Aufgabe 9 (schriftlich): Störungstheorien (7 Punkte)
Ein harmonischer Oszillator, der durch den Hamiltonoperator

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

beschrieben wird, erfährt eine Störung, die sich durch $H_1 = \frac{1}{2}m\omega^2\lambda x^2$ ausdrücken lässt.

a) Berechnen Sie die Energiekorrektur zum Grundzustand in erster Ordnung Störungstheorie.

b) Zeigen Sie, dass sich die Korrektur zur Grundzustands-Wellenfunktion in erster Ordnung als Vielfaches der Wellenfunktion des zweiten angeregten Zustands schreiben lässt.

c) Berechnen Sie die Grundzustandsenergie bis zur zweiten Ordnung sowohl in Rayleigh-Schrödinger- als auch in Brillouin-Wigner-Störungstheorie.
Hinweis: In der Brillouin-Wigner-Störungstheorie findet sich die zu berechnende Grundzustandsenergie auf beiden Seiten der Gleichung. Um diese zu berechnen müssen Sie also eine quadratische Gleichung lösen.

d) Wie lautet die exakte Grundzustandsenergie des durch $H = H_0 + H_1$ beschriebenen Systems?

e) Vergleichen Sie die störungstheoretischen Ergebnisse mit der exakten Grundzustandsenergie, indem Sie sie als Funktion von λ plotten.

Aufgabe 10 (schriftlich): Kopplung zweier Spin-1-Teilchen (5 Punkte)
Zwei Spins $\vec{S}_1$ und $\vec{S}_2$ mit den Quantenzahlen $s_1 = s_2 = 1$ sollen zum Gesamtspin $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ gekoppelt werden.

a) Welche Werte nimmt die Quantenzahl s des Gesamtspins an? Wie viele linear unabhängige Zustände gibt es?

b) Konstruieren Sie die Eigenzustände $|s, m\rangle$ zu S^2 und S_z ausgehend von den ungekoppelten Zuständen $|s_1, m_1; s_2, m_2\rangle$.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst untere Verwendung des Operators S_- die Eigenzustände mit dem größtmöglichen Wert von s. Durch Orthogonalisierung und erneute Anwendung von S erhalten Sie dann die Zustände mit dem nächstniedrigeren Wert von s usw. Gemäß Vorlesung gilt für die Wirkung eines Absteigeoperators J_- auf einen Zustand :

$$J_- |j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\, |j, m-1\rangle$$

Aufgabe 11 (mündlich): Clebsch-Gordan-Koeffizienten (10 Punkte)
In der Vorlesung (Kap. 13.4) wurde für die Spin-Bahn-Kopplung angegeben, dass sich die Eigenzustände schreiben lassen als:

$$\left| l + \frac{1}{2}, m_j \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left[\sqrt{l + m_j + \frac{1}{2}} \left| m_j - \frac{1}{2}; \uparrow \right\rangle + \sqrt{l - m_j + \frac{1}{2}} \left| m_j + \frac{1}{2}; \downarrow \right\rangle \right] , \qquad (1)$$

$$\left| l - \frac{1}{2}, m_j \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left[\sqrt{l - m_j + \frac{1}{2}} \left| m_j - \frac{1}{2}; \uparrow \right\rangle - \sqrt{l + m_j + \frac{1}{2}} \left| m_j + \frac{1}{2}; \downarrow \right\rangle \right] . \qquad (2)$$

Beweisen Sie Gl. (1) z.B. mittels vollständiger Induktion. Begründen Sie damit, ausgehend von der Orthogonalität der Zustände, auch die Relation in Gl. (2).
Hinweis: Zeigen Sie dazu zunächst, dass die Formel für maximales m_j gilt und wenden Sie anschließend den Absteigeoperator J_- auf $|j, m_j\rangle$ an, um den Induktionsschritt durchzuführen. Es sind

$$J_- |j, m_j\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m_j(m_j-1)}\, |j, m_j - 1\rangle \qquad \text{und} \qquad J_- = L_- + S_- \ .$$