**Aufgabe 12 (schriftlich):** Klein-Gordon-Gleichung (10 Punkte)

**a)** Zeigen Sie, dass sich die Klein-Gordon-Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \Delta\psi + \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 \psi = 0$$

unter Verwendung der Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

in Form einer Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi \ ,$$

mit

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \ , \qquad \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi + \widetilde{\psi}\right) \ , \qquad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi - \widetilde{\psi}\right) \ , \qquad \widetilde{\psi} = \frac{i\hbar}{m_0 c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$\text{und} \qquad H = -\frac{\hbar^2}{2m_0}(\sigma_3 + i\sigma_2)\Delta + m_0 c^2 \sigma_3 \ ,$$

schreiben lässt.
*Hinweis: Die Definition von $\widetilde{\psi}$ und die KGG ergeben zusammen zwei Differentialgleichungen erster Ordnung.*

**b)** Zeigen Sie, dass sich unter der Verwendung der Matrizen aus Teil **a)** die Viererstromdichte aus der Vorlesung

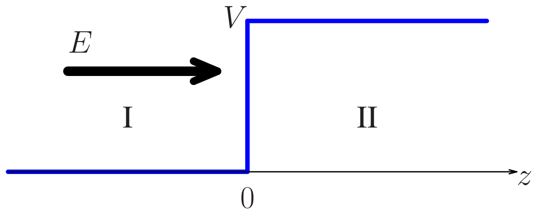
$$\varrho = \frac{i\hbar}{2m_0 c^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) \ , \qquad \vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m_0}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) \ .$$

umschreiben lässt als

$$\varrho = \frac{1}{2}(\phi^*\phi - \chi^*\chi) = \frac{1}{2}\Psi^\dagger\sigma_3\Psi \ , \qquad \vec{j} = \frac{\hbar}{4im_0}\left[\Psi^\dagger\sigma_3(\sigma_3 + i\sigma_2)\nabla\Psi - (\nabla\Psi)^\dagger\sigma_3(\sigma_3 + i\sigma_2)\Psi\right] \ .$$

**Aufgabe 13 (mündlich):** Potentialstufe für relativistische Teilchen (15 Punkte)

Ein Teilchen der Ruheenergie $E_0 = m_0 c^2$ und der relativistischen Energie $E = \sqrt{p^2c^2 + E_0^2} + V(z)$ bewege sich in $z$-Richtung auf eine Potentialstufe der Höhe $V$ bei $z = 0$ zu (siehe Skizze).




**a)** Welchen Impuls hat das Teilchen in den beiden Bereichen?

**b)** In Kapitel 14.3.2 wurde gezeigt, dass die beiden Spinoren $\chi$ und $\varphi$ der Lösung der Dirac-Gleichung von einander abhängen. In Gegenwart eines stückweise konstanten Potentials gilt

$$E\varphi = c(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\chi + E_0\varphi + V(z)\varphi \ ,$$

$$E\chi = c(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\varphi - E_0\chi + V(z)\chi \ .$$

Es sei $\varphi = \binom{1}{0}$, wie lautet dann $\chi$ in den beiden Bereichen?

**c)** Machen Sie einen geeigneten Ansatz für die Wellenfunktion in den beiden Bereichen. Verwenden Sie die Anschlussbedingung $\psi_{\text{I}}(0) = \psi_{\text{II}}(0)$, um die Amplituden in Beziehung zu setzen.
*Hinweis: Für eine rücklaufende Welle ändert sich nur das Vorzeichen des Impulses.*

**d)** Berechnen Sie die Stromdichten $\vec{j} = c\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi$ des einfallenden, des reflektierten und des transmittierten Teils der Wellenfunktion, dabei ist $\vec{\alpha}$ der Vektor der Diracschen Spinmatrizen, mit

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**e)** Was ergibt sich damit für den Reflexionskoeffizienten $R = |\vec{j}_{\text{refl}}|/|\vec{j}_{\text{ein}}|$ und den Transmissionkoeffizienten $R = |\vec{j}_{\text{trans}}|/|\vec{j}_{\text{ein}}|$?
*Hinweis: Mit den Abkürzungen*

$$a = \sqrt{\frac{E - E_0}{E + E_0}} \qquad \textit{und} \qquad b = \sqrt{\frac{E - E_0 - V}{E + E_0 - V}}$$

*lassen sich $R$ und $T$ in eine bekannte Form bringen. Achtung: Im Allgemeinen ist $b \in \mathbb{C}$.*

**f)** Berechnen Sie die Koeffizienten $R$ und $T$ für folgende Stufenhöhen

**(1)** $V = 0$,
**(2)** $0 < V < E - E_0$,
**(3)** $V = E - E_0$,
**(4)** $E - E_0 < V < E + E_0$,
**(5)** $V = E + E_0$,
**(6)** $E + E_0 < V < \infty$,
**(7)** $V \to \infty$.

**g)** Fügen Sie alle sieben Bereiche in Graphen $R(V)$ und $T(V)$ zusammen und vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem bekannten Verhalten für ein nichtrelativistisches Teilchen (Vorlesung Kap. 1.7.2). Was fällt Ihnen auf?