Aufgabe 16 (schriftlich): Wasserstoffatom im äußeren Magnetfeld (12 Punkte)
Für ein Wasserstoffatom im äußeren Magnetfeld $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$ sei der Hamiltonoperator

$$H = H_0 + \frac{eB}{2m}\big(L_z + 2S_z\big) + \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 m^2 c^2 r^3}\vec{L}\cdot\vec{S} = H_0 + H_1$$

gegeben. Dabei ist H_0 der Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms ohne Magnetfeld und ohne Spin-Bahn-Kopplung. Die Eigenwerte $E_n^{(0)}$ und die Eigenzustände $|n, l, m_l, m_s\rangle$ von H_0 werden als bekannt vorrausgesetzt. Dabei sind l und $s = \frac{1}{2}$ die Quantenzahlen zu den Drehimpulsoperatoren L^2 und S^2, m_l und m_s diejenigen zu L_z und S_z, n ist die Hauptquantenzahl. Die $2p$-Zustände $|2, 1, m_l, m_s\rangle$ sind bezüglich m_l und m_s entartet. Gesucht ist die Aufspaltung dieser Niveaus in erster Ordnung Störungstheorie.
Anmerkung: Da l weiterhin eine gute Quantenzahl ist, müssen die ebenfalls entarteten $2s$-Zustände hier nicht betrachtet werden.

a) Berechnen Sie zunächst die Matrixelemente $\langle n, l, m_l, m_s|\, L_z + 2S_z\,|n, l, m_l', m_s'\rangle$ und $\langle n, l, m_l, m_s|\,\vec{L}\cdot\vec{S}\,|n, l, m_l', m_s'\rangle$ für $n = 2;\ l = 1;\ s = 1/2$. Drücken Sie dabei $\vec{L}\cdot\vec{S}$ durch die Operatoren $L_\pm,\ S_\pm,\ L_z$ und S_z aus. Bestimmen Sie damit die Matrixelemente des Störoperators H_1. Verwenden Sie dazu die Radialfunktion

$$R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2a}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{r}{a}\,e^{-\frac{r}{2a}}$$

mit dem Bohr-Radius $a = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$. Führen Sie die beiden Abkürzungen

$$\kappa = \frac{e\hbar B}{2m} \qquad \text{und} \qquad \lambda = \frac{e^2\hbar^2}{384\,\pi\varepsilon_0 m^2 c^2 a^3}$$

ein.

b) Stellen Sie die zugehörige Säkulargleichung auf und lösen Sie diese. Bestimmen Sie damit die sechs Energieeigenwerte in erster Ordnung Störungstheorie.

c) Diskutieren Sie das Ergebnis für die Grenzfälle $\kappa \ll \lambda$ (Zeeman-Effekt) und $\kappa \gg \lambda$ (Paschen-Back-Effekt) und skizzieren Sie den Verlauf der Energien als Funktion von κ für festes λ.

Aufgabe 17 (mündlich): LS- und jj-Kopplung (8 Punkte)
Betrachten Sie zwei Elektronen mit Spin $s = 1/2$ und Bahndrehimpuls $l = 1$.

a) Wieviele linear unabhängige Zustände hat dieses System?

b) Welche Werte kann die Quantenzahl L des Gesamtbahndrehimpulses $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ annehmen?

c) Welche Werte kann die Quantenzahl S des Gesamtspins $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ annehmen?

d) Geben Sie die möglichen Werte der Quantenzahl J des Gesamtdrehimpulses $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ an.

e) Was sind die möglichen Werte für j_1 und j_2 des Gesamtdrehimpulses $\vec{J}_i = \vec{L}_i + \vec{S}_i$ $(i = 1,\ 2)$ jedes einzelnen Elektrons?

f) Bestimmen Sie die möglichen Werte für J aus der Kombination von j_1 und j_2 und vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus **c)**.