

Mathe-Repetitorium zur Physik I

Vorlesung: Prof. Dr. P.Krüger, Prof. Dr. A.Kappes

Mathe-Rep: Dr. K.Kovařík

Woche 10 - Komplexe Zahlen

Aufgabe 1: Komplexe Zahlenebene

Zeichnen Sie folgende Zahlen als Punkte in die komplexe Zahlenebene ein:

- | | | | |
|--------------|---------------------------|-----------------|-----------------------------------|
| (a) $3 + 2i$ | (c) $3e^{i\frac{\pi}{2}}$ | (e) $-e^{i\pi}$ | (g) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$ |
| (b) $1 - 3i$ | (d) $e^{i\frac{3\pi}{2}}$ | (f) $1 \pm i$ | (h) $-3 - 4i$ |

Aufgabe 2: Addition und Subtraktion

Berechnen Sie für die komplexen Zahlenpaare z_1 und z_2 : $z_1 + z_2$ und $z_1 - z_2$.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| (a) $z_1 = 5 + i$ $z_2 = 2 - 2i$ | (c) $z_1 = 6 + 3i$ $z_2 = e^{i\pi}$ |
| (b) $z_1 = -3 - 12i$ $z_2 = 4 - 2i$ | (d) $z_1 + z_2 = 7 - i$, $z_1 - z_2 = 3 + 3i$ |

Aufgabe 3: Multiplikation

Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$

- | | |
|--|---|
| (a) $z_1 = 5 + i$ $z_2 = 2 - 2i$ | (d) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ $z_2 = e^{i\frac{\pi}{9}}$ |
| (b) $z_1 = -3 - i$ $z_2 = 1 - i$ | (e) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ $z_2 = 1 + i$ |
| (c) $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ $z_2 = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}$ | (f) $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ $z_2 = 1 - i$ |

Aufgabe 4: Real und Imaginärteil

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen/Funktionen:

- | | | | |
|----------------------------|---------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|
| (a) $6 - 3i$ | (d) e^{3i+2} | (g) $\frac{7i-2}{14i}$ | (j) $z(t) = 2 - i + 3e^{it}$ |
| (b) $e^{i\pi}$ | (e) $\frac{1}{1+i}$ | (h) $\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{6+2i}$ | (k) $z(t) = \frac{t-i}{t+i}$ |
| (c) $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$ | (f) $(1 + 2i)^2$ | (i) $z(t) = (t + 2i)^4$ | (l) $z(t) = \frac{1}{e^{(2+i)t}}$ |

Aufgabe 5: Betrag

Berechnen Sie den Betrag folgender komplexer Zahlen:

- (a) $1 - 3i$ (c) $\pm i$ (e) $6e^{i\frac{\pi}{7}}$ (g) $3e^{2+6i}$
(b) $4(1 + i)$ (d) $e^{i\phi}$ (f) $\frac{2-i}{4-i}$ (h) $\frac{7i-2}{14i}$

Aufgabe 6: Potenzen und Wurzeln

Berechnen Sie:

- (a) i^{15} (e) $\sqrt[5]{10 + 10i}$
(b) i^{2n} (f) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$
(c) i^{4n} (g) $\sqrt[3]{-8}$
(d) $(1 + i\sqrt{3})^6$

Aufgabe 7: Komplexe Funktionen

Bestimmen Sie ob die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ identisch sind

- (a) $f(t) = 3 \cos t + i(2 + 3 \sin t)$ $g(t) = e^{i3t} + 2e^{i\pi/2}$
(b) $f(t) = \frac{e^{2-it}}{e^{2+it}}$ $g(t) = \cos 2t - i \sin 2t$
(c) $f(t) = |e^{it}| - it$ $g(t) = \overline{(1 + it)}$
(d) $f(t) = \frac{e^{it-i}}{e^{it-i}}$ $g(t) = 1$

Aufgabe 8: Komplexe Ausdrücke

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke

- (a) $\frac{1+i}{1-i} - (1+2i)(2+2i) + \frac{3-i}{1+i}$ (c) $\frac{(2-3i)-(3+2i)}{(3+2i)-(2+i)}$
(b) $2i(i-1) + \frac{3}{(\sqrt{3}+i)^3} + (1+i)\overline{(1+i)}$ (d) $\frac{6(\cos 5x + i \sin 5x)}{3(\cos 2x + i \sin 2x)}$

Aufgabe 9: Logarithmen

Berechnen Sie die Logarithmen $\ln(-1)$ und $\ln(-10)$.