Mathe-Repetitorium zur Physik I

Vorlesung: Prof. Dr. P.Krüger, Prof. Dr. A.Kappes
Mathe-Rep: Dr. K.Kovařík

Woche 13 - Differenzialgleichungen

Aufgabe 1: Differentialgleichungen mit Bedingungen

Lösen Sie folgende DGLen mit den gegebenen (Anfangs-) Bedingungen:

(a) $y' = 2x + 2 \qquad y(0) = 1$

(b) $y' = xe^{4x^2} \qquad y(\frac{1}{2}) = e$

(c) $y'' = 6x \qquad y'(0) = 2 \qquad y(2) = 0$

(d) $y'' = 8 \qquad y'(1) = 6 \qquad y(\frac{1}{2}) = 16$

(e) $y'' = 3e^{-3x} \qquad y'(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{e} \qquad y(0) = 0$

(f) $y''' = -15 \qquad y''(-1) = 5 \qquad y'(0) = 3 \qquad y(0) = 0$

Aufgabe 2: Trennung der Variablen

Benutzen Sie die Trennung der Variablen um folgende Differenzialgleichungen zu lösen:

(a) $y' = \frac{x}{y}$

(b) $y' = \frac{1}{2}(3 - y)$

(c) $y' = y^2 \sin(x)$

(d) $y(1 - x^2)y' - x(1 - y^2) = 0$

(e) $y' = (y - 3)\cos(x)$

(f) $y' = f(x) \cdot y$

Aufgabe 3: Anfangswertproblem

Lösen Sie die Anfangswertprobleme mit Trennung der Variablen:

(a) $y' = xy + 2x \qquad y(0) = 2$

(b) $y' = x^2y^3 \qquad y(1) = -1$

(c) $(x - 1) + 3y^2y' = 0 \qquad y(2) = 1$

Aufgabe 4: Homogene Differentialgleichungen

Bestimmen Sie zunächst die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen. Geben Sie dann die Lösungen zu den angegebenen Bedingungen an.

(a) $y'' + 25y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y(\frac{\pi}{10}) = 1$

(b) $y'' + 25y = 0 \qquad y(\frac{\pi}{5}) = -1 \qquad y'(\frac{\pi}{5}) = -1$

(c) $y'' - 2y' + 5y = 0 \qquad y(0) = -2 \qquad y'(0) = -2$

(d) $y'' - 2y' + 10y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 0$

(e) $y'' + 6y' + 9y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 1$

(f) $y'' + 4y' - 3y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$

Aufgabe 5: Homogene Differentialgleichung höherer Ordnung

Geben Sie die allgemeine Lösung zu folgender Differentialgleichung an:

(a) $y''' - 5y'' + 4y' = 0$

(b) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

(Tipp: Finden Sie in (b) die erste Nullstelle durch Ausprobieren kleiner ganzer Zahlen und führen Sie anschließend eine Polynomdivision durch.)

Aufgabe 6: Inhomogene Differentialgleichungen I

Gegeben sind die Differentialgleichung für $x > 0$

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

und die spezielle Lösung für $x > 0$

$$y_{speziell} = -\ln(x)e^{3x} - e^{3x}.$$

Zeigen Sie, dass $y_{speziell}$ wirklich eine Lösung der Differentialgleichung ist. Wie lautet die allgemeine Lösung?

Aufgabe 7: Inhomogene Differentialgleichungen II

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung zu den folgenden Differentialgleichungen. Lösen Sie dazu erst die zugehörige homogene Differentialgleichung und finden Sie eine spezielle Lösung mit Hilfe eines sinnvollen Ansatzes.

(a) $y'' + 4y = e^{3x}$

(b) $y'' + y' - 2y = \sin x$

(c) $y'' - 4y = xe^x + \cos 2x$

(d) $y'' + y = e^x + x^3, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 0$

(e) $y'' + y' - 2y = x + \sin 2x, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$