Mathe-Repetitorium zur Physik I

Vorlesung: Prof. Dr. P.Krüger, Prof. Dr. A.Kappes
Mathe-Rep: Dr. K.Kovařík

Woche 4 - Trigonometrische Funktionen

Aufgabe 1: Trigonometrische Ausdrücke I

Vereinfachen Sie die folgende trigonometrische Ausdrücke wo Sie z.B. die Identität $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ verwenden

(a) $\sin x \cot x$

(b) $\dfrac{1-\sin^2 x}{\cos x}$

(c) $\sin t - \sin t \cos^2 t$

(d) $\cos x + \tan x \sin x$

(e) $\sin^3 x + \sin x \cos^2 x$

(f) $\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

(g) $\dfrac{\tan^2 t + 1}{1+\cot^2 t}$

(h) $\dfrac{\sin^2 t \cot^2 t}{1-\sin^2 t}$

(i) $\dfrac{1}{\sec t - \tan t} - \dfrac{1}{\sec t + \tan t}$

(j) $\dfrac{\sec t \tan t}{1+\tan^2 t}$

Aufgabe 2: Trigonometrische Ausdrücke II

Vereinfachen Sie die folgende trigonometrische Ausdrücke

(a) $\dfrac{1+\cos x + \cos 2x}{\sin x + \sin 2x}$

(b) $\dfrac{\sin 4x}{\cos 2x}$

(c) $\dfrac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)}$

(d) $\dfrac{\sin 2x}{(1-\cos^2 x)}\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$

(e) $\dfrac{\tan 2x \cos x}{\sin x} - \dfrac{\tan 2x \sin x}{\cos x}$

(f) $\dfrac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$

(g) $\dfrac{\sec x \sin^2 x}{1+\sec x}$

(h) $\sin(-x)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

(i) $\tan^4 x + 2\tan^2 x + 1$

(j) $\dfrac{1}{1+\cos x} + \dfrac{1}{1-\cos x}$

(k) $\dfrac{1-\sin^4 x}{1+\sin^2 x}$

(l) $\tan^2 x \cos^2 x + \cot^2 x \sin^2 x$

Aufgabe 3: Trigonometrische Ausdrücke III

Vereinfachen Sie die folgende trigonometrische Ausdrücke

(a) $\sin^4 x - \cos^4 x$

(b) $\dfrac{\sin^2 x + 4\sin x + 3}{\cos^2 x}$

(c) $\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

(d) $\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

(e) $\cos t(\sec t - \cos t)$

(f) $\dfrac{\tan t + \cot t}{\tan t}$

(g) $\dfrac{(\sin t + \tan t)^2 + \cos^2 t - \sec^2 t}{\tan t}$

(h) $\dfrac{\sec t - \cos t}{3\tan t \sin t}$

(i) $\dfrac{\sin^3 t + \cos^3 t}{1-\sin t \cos t}$

(j) $\dfrac{\sin t(1+\sin t)}{1-\cos^2 t} - 1$

(k) $\dfrac{\sin^2 t - \tan^2 t}{\tan^2 t \sin^2 t}$

(l) $\dfrac{\sin^3 t + \cos^3 t}{(\cos t + \sin t)^2}$ (l) $\dfrac{1 - \tan^2 t}{1 + \tan^2 t} + 1$ (n) $\dfrac{\tan t - \tan t \sin^2 t}{2 \sin t \cos t}$

(l) $\dfrac{\cos t}{1 + \sin t} + \dfrac{\cos t}{1 - \sin t}$ (m) $\dfrac{1 + \tan^2 t + \sec^2 t \cot^2 t}{\csc^2 t + \cot^2 t \csc^2 t}$ (o) $\dfrac{\cot t \sec^2 t - \cot t}{\sin t \tan t + \cos t}$

Aufgabe 4: Trigonometrische Identitäten

Benutzen Sie

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

um die folgende Identitäten abzuleiten

(a) $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

(b) $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

(c) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

(d) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

Aufgabe 5: Trigonometrische Substitution I

Beim integrieren wird oft eine trigonometrische Substitution $t = \tan x$ benutzt. Zeigen Sie, dass bei dieser Substitution gilt

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$$

Aufgabe 6: Trigonometrische Substitution II

Beim integrieren wird oft eine trigonometrische Substitution $t = \tan \frac{x}{2}$ benutzt. Zeigen Sie, dass bei dieser Substitution gilt

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \qquad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Aufgabe 7: Inverse trigonometrische Funktionen

Zeigen Sie folgende sehr nützliche Identitäten

(a) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

(b) $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

(c) $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

(d) $\tan(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$